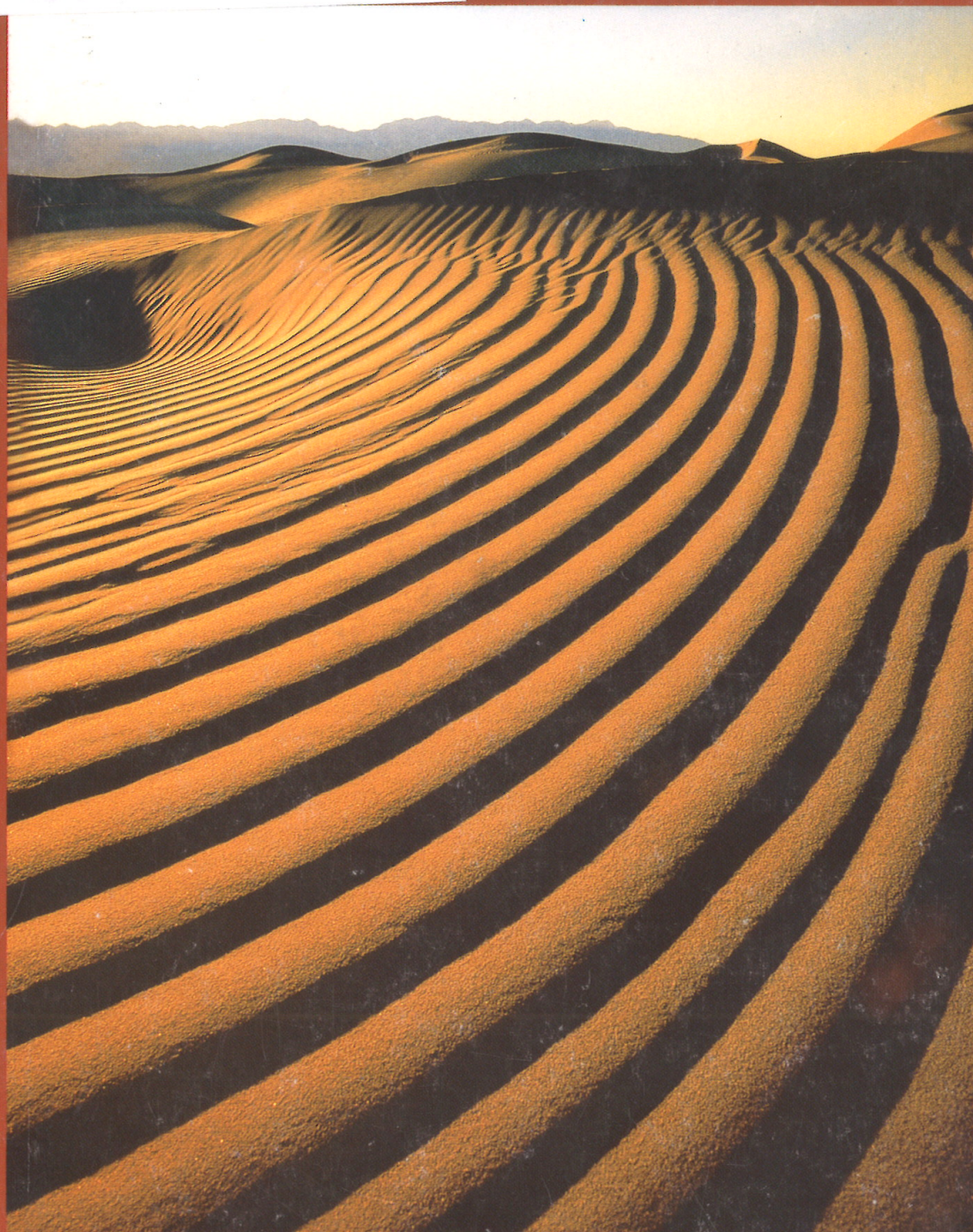


VARASTOKIRJASTO



M1 14 034980

JULUS 11



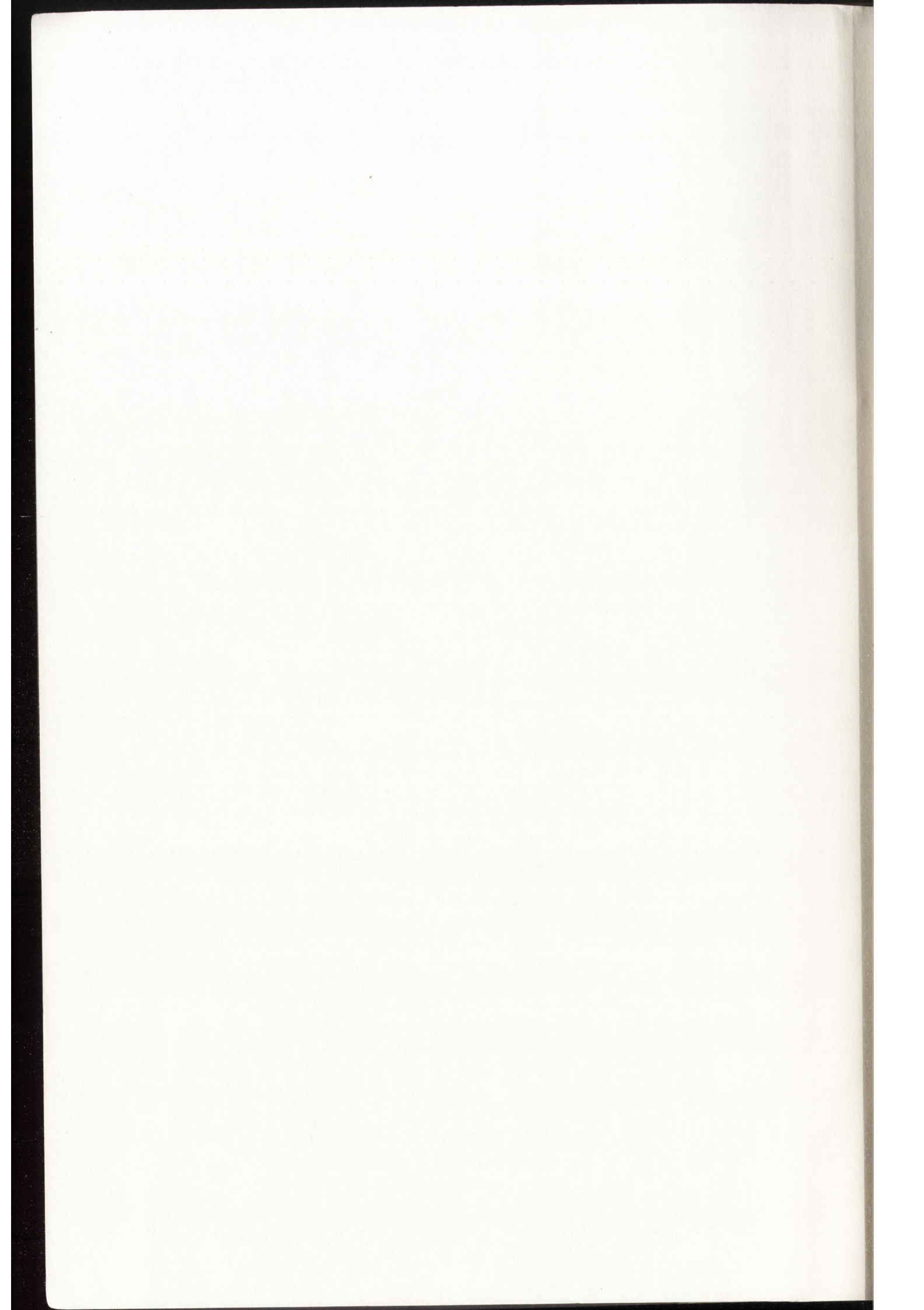
LINEAARIALGEBRA

Paavo Jäppinen

Alpo Kupiainen

Matti Räsänen

Otava



11

Calculus

Lineaarialgebra

PAAVO JÄPPINEN

ALPO KUPIAINEN

MATTI RÄSÄNEN



HELSINGISSÄ KUSTANNUSOSAKEYHTIÖ OTAVA

VARASTOKIRJASTO



165 1683881

1. painos

© Tekijät ja Kustannusosakeyhtiö Otava 1999

Graafinen suunnittelu: Lauri Mäkinen

Taitto: Eeva Lehtonen

Toimitus: Riitta Happonen

Osittainen kopiointikielto

Tämän teoksen kopioiminen on tekijänoikeuslain (404/61, sellaisena kuin se on viimeksi muutettuna lailla 1654/95) mukaisesti kielletty lukuun ottamatta Suomen valtion ja Kopiosto r.y:n tekemässä sopimuksessa tarkemmin määriteltyä osittaista kopiointia opetustarkoituksiin.

Sidonta: **OTABIND**

Painopaikka:

Otavan Kirjapaino Oy

Keuruu 1999

ISBN 951-1-15930-5

Alkusanat

Calculus 11 täydentää samannimistä lukion pitkän matematiikan oppikirjasarjaa. Kirja sisältää valinnaisena luettavan Lineaarialgebran kurssin, joka kuuluu matematiikan syventäviin opintoihin.

Lineaarialgebraa tarvitaan lähes kaikilla matematiikan aloilla sekä fysiikassa ja monissa muissakin matematiikkaa käyttävissä tieteissä. Siksi lineaarialgebran opetus on vakiintunut yliopistoissa ja korkeakouluissa sijoittuen tavallisesti matematiikan opintojen alkuun. Myös lukioissa on tunnettu lineaarialgebraa kohtaan mielenkiintoa sen selkeän rakenteen ja keskeisen merkityksen vuoksi. Sisältönsä puolesta nyt käsillä oleva kirja sopii lukion ohella myös muihin keskiasteen oppilaitoksiin ja ammattikorkeakouluihin. Vektorilaskennan ja analyyttisen geometrian perustiedoista on kurssin omaksumisessa hyötyä.

Ensimmäisessä luvussa esitellään matriisit ja niiden laskutoimitukset. Samalla kohdataan koordinaatiston vektorit ja useampi- kuin kolmiulotteinen avaruus. Matriisin sovelluksissa on muutama esimerkki ja tehtävä lineaarikuvauksista siltä varalta, että tätä mielenkiintoista aihepiiriä ei ehdittäisi kurssi loppupuolella käsitellä. Matriisien laskutoimituksissa voi aivan hyvin käyttää laskinta tai tietokonetta, kunhan käsin laskemisen osaaminen on ensin varmistettu.

Toisessa luvussa havainnollistetaan lineaaristen yhtälöryhmien rakaisujoukkoja geometrisesti ja esitellään sitten ratkaisemisessa käytettävät Gaussin ja Gaussin-Jordanin menetelmät. Näistä jälkimmäinen voidaan sivuuttaa tai käsitellä vain esittelynomaisesti, mikäli kurssin sisältöä halutaan tältä osin keventää.

Kolmas luku esittelee lineaariavaruuden ja neljäs sisätuloavaruuden käsitteistöä ja ominaisuuksia. Tällöin tarjoutuu erinomainen näkökulma matemaattisen teorian rakentumiseen. Lineaariavaruuden käsittelyyn liittyy lisäksi mahdollisuus matemaattisen todistamisen harjoitteluun sopivan helppoissa tilanteissa. Tässä onnistuakseen on syytä käydä malliesimerkit juurta jaksen läpi ja nojautua todistuksissa tarkoin määritelmiin. Perusteluissa esiintyy nimittäin suorastaan itsestään selviltä näyttäviä sääntöjä, jotka voivat jäädä ajattelunkulun ulkopuolelle vaistonvaraisesti edettäessä. Todistamisen harjoittelu helpottaa myöhemmin siirtymistä koulumatematiikasta korkeakoulumatematiikkaan.

Viimeinen luku käsittää tason lineaarikuvaukset. Siinä yhdistellään kiintoisalla ja havainnollisella tavalla edellisissä luvuissa opittuja asioita.

Kirjan runsasta tehtävävalikoimaa täydentää neljä kertauskoesarjaa. Ne soveltuvat omatoimiseen harjoitteluun tai opetuksessa käytettäväiksi lisätehtäviksi. Vaativimmat tehtävät on ilmaistu tähdellä (*). Kirjan keskeiset lauseet on painettu väripohjalle ja määritelmät korostettu lisäksi väripalkein.

Kurssia kirjoitettaessa meillä on ollut tilaisuus käyttää lineaarialgebran asiantuntijana lehtori FT Martti Pesosta, jolle lausumme parhaat kiitokset tehdyistä korjauksista ja parannusesityksistä.

Tammikuussa 1999

Tekijät

Sisällys

LINEAARIALBEBRA

Matriisit

- 1 Matriisi ja vektori 6
- 2 Matriisin kertominen luvulla 9
- 3 Matriisien yhteenlasku ja vähennyslasku 10
- 4 Matriisien kertolasku 12
- 5 Matriisin potenssi 16
- 6 Käänteismatriisi 20
- 7 Determinantti 24

Lineaariset yhtälöryhmät

- 1 Ratkaisun olemassaolo 29
- 2 Yhtälöryhmän matriisimuoto 33
- 3 Gaussin eliminointimenetelmä 36
- 4 Gaussin-Jordanin eliminointimenetelmä 40

Lineaariavaruus

- 1 Lineaariavaruuden määritelmä 47
- 2 Määritelmän seurauksia 51
- 3 Aliavaruus 54
- 4 Lineaarinen riippuvuus 56
- 5 Kanta ja dimensio 59

Sisätuloavaruus

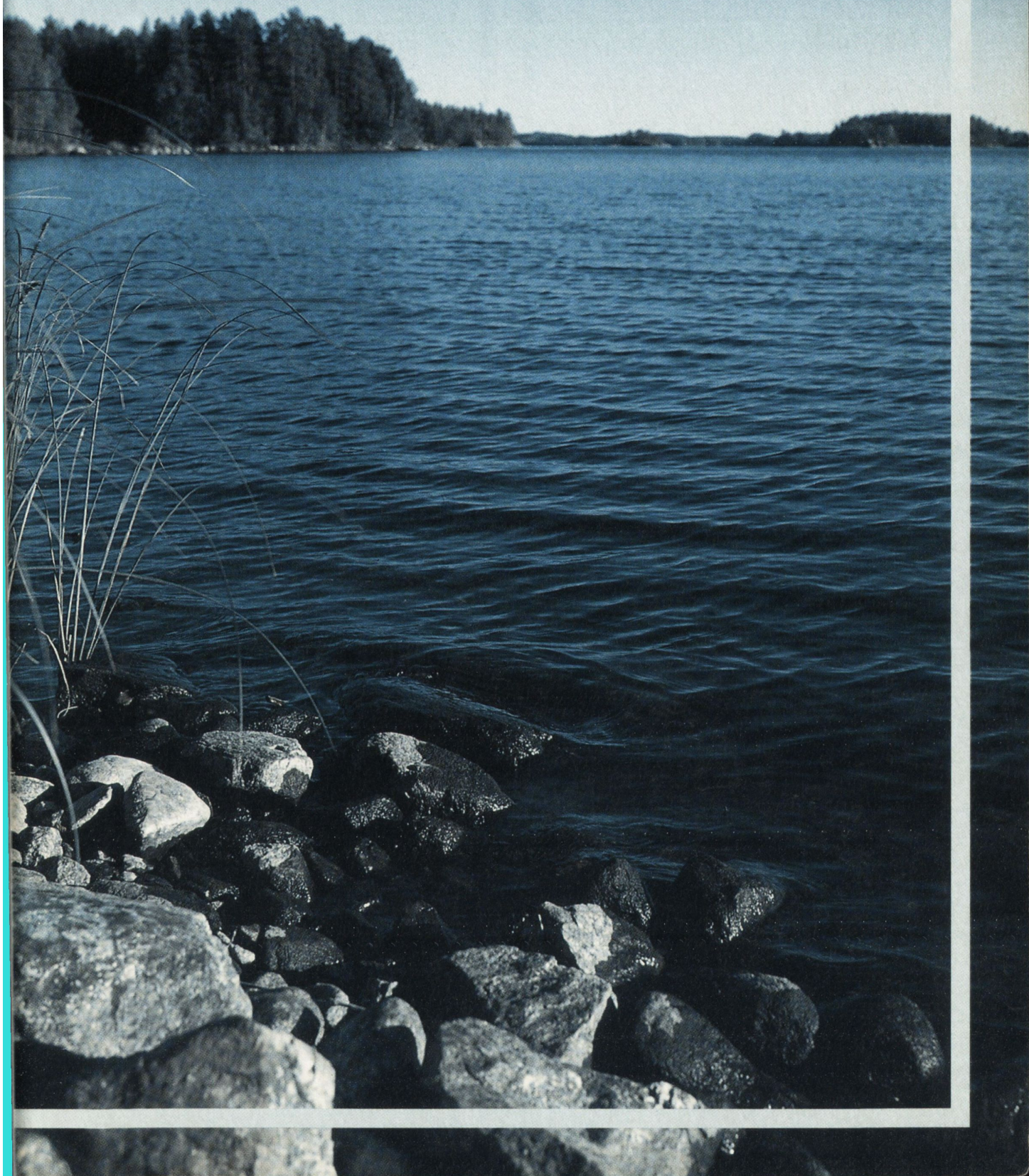
- 1 Sisätulo 62
- 2 Normi 64
- 3 Kohtisuoruus 66

Tason lineaarikuvaukset

- 1 Lineaarikuvaus 71
- 2 Venytys 73
- 3 Peilaus 74
- 4 Projektio 76
- 5 Kierto 80

Kertauskokeet 84
Vastauksia 89

Lineaari- algebra



Matriisit

1 Matriisi ja vektori

Ajatellaan esimerkkinä, että opetusryhmälle tilataan koulutunnuksin varustettuja paitoja neljää eri kokoa ja kolmea eri väriä niin, että kokoa S tilataan 5 punaista, 4 keltaista ja 1 harmaa, kokoa M tilataan 6 punaista, 5 keltaista ja 2 harmaata, kokoa L tilataan 7 punaista ja 3 harmaata, ja kokoa XL tilataan 2 punaista, 3 keltaista ja 4 harmaata.

Tilaustiedoista syntyy jäsentyneempi kuva, kun ne järjestetään taulukoksi seuraavasti:

	punainen	keltainen	harmaa
S	5	4	1
M	6	5	2
L	7	0	3
XL	2	3	4

Taulukon luvut muodostavat suorakulmion muotoisen kaavion. Tällaista lukukaaviota sanotaan *matriisiksi* ja sen lukuja matriisin *alkioiksi*. Matriisi merkitään tavallisesti kaarisulkeita käyttäen ja nimetään isoin kirjaimin. Äskeistä taulukkoa vastaava matriisi

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 6 & 5 & 2 \\ 7 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

sisältää neljä *vaakariviä* ja kolme *pystyriviä*. Sanotaan, että se on 4×3 -matriisi. Matriisin alkioista käytetään yleisesti merkintää a_{ij} , jolloin kyseinen alkio sijaitsee i :nnellä vaakarivillä ja j :nnellä pystyrivillä. Tämän merkinnän mukaan matriisin A alkio a_{13} on 1 ja alkio a_{41} on 2. Sellaisesta matriisista, jossa on m vaakariviä ja n pystyriviä, käytetään yleistä merkintää $(a_{ij})_{m \times n}$ tai $A_{m \times n}$, ja tällaisen matriisin sanotaan olevan *tyyppiä* $m \times n$.

Jos matriisissa on vain yksi vaakarivi tai vain yksi pystyrivi, niin matriisia sanotaan *vektoriksi*. Esimerkiksi edellä olevan matriisin A vaakariveistä saadaan *vaakavektorit*

$$X_1 = (5 \ 4 \ 1), \ X_2 = (6 \ 5 \ 2), \ X_3 = (7 \ 0 \ 3) \text{ ja } X_4 = (2 \ 3 \ 4)$$

ja pystyryiveistä *pystyvektorit*

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \ Y_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ ja } Y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

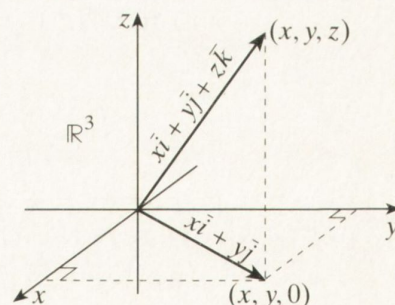
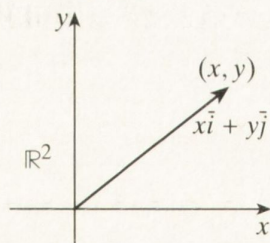
Näitä vektoreita käyttäen voidaan matriisi A esittää muodossa

$$A = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} \text{ tai } A = (Y_1 \ Y_2 \ Y_3).$$

Vektorin käsite liittyy tunnetusti myös vektorilaskentaan, jota sovelletaan fysiikassa ja matematiikassa. Tason vektori esitetään usein koordinaattimuodossa $x\bar{i} + y\bar{j}$ ja avaruuden vektori vastaavasti muodossa $x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$. Tällöin $\bar{i}$, $\bar{j}$ ja $\bar{k}$ ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa olevia yksikkövektoreita ja x , y ja z reaalilukuja. Tason vektori voitaisiin esittää yhtä hyvin järjestettynä lukuparina

(x, y) tai muodossa $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ja avaruuden vektori lukukolmikkona

(x, y, z) tai muodossa $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, kuten joskus tehdäänkin. Tällä perusteella 1×2 - ja 2×1 -matriisit voidaan tulkita tason vektoreiksi ja 1×3 - ja 3×1 -matriisit avaruuden vektoreiksi. Vastaavasti voidaan tulkita, että tyyppiä 1×1 oleva matriisi (x) tarkoittaa reaalilukua x .



On tapana merkitä $\mathbb{R}^2$:lla kaikkien järjestettyjen reaalilukuparien joukkoa ja $\mathbb{R}^3$:lla kaikkien järjestettyjen reaalilukukolmikoiden joukkoa. Voidaan myös tulkita, että $\mathbb{R}^2$ tarkoittaa tason ja $\mathbb{R}^3$ avaruuden pisteiden joukkoa tai vastaavasti tason ja avaruuden vektorien joukkoa. Yleisesti merkintä $\mathbb{R}^n$ esittää n -ulotteista avaruutta tai vektorijoukkoa, jolloin n voi olla suurempikin kuin 3.

Matriiseihin liittyy vielä joitakin usein esiintyviä nimityksiä ja peruskäsitteitä.

1. Kahta matriisia A ja B sanotaan *yhtäsuuriksi* tai *samoiksi*, jos ne ovat samaa tyyppiä ja niiden kaikki vastinalkiot ovat samat. Tällöin merkitään $A = B$.
2. Jos matriisin A vaakarivit vaihdetaan pystyriveiksi, saadaan A :n *transpoosi* eli *transponoitu matriisi* A^T . Jos A on tyyppiä $m \times n$, niin A^T on tyyppiä $n \times m$.
3. Jos matriisin vaaka- ja pystyrivien lukumäärä on sama eli jos matriisi on tyyppiä $n \times n$, sitä sanotaan *neliömatriisiksi*.
4. Neliömatriisin alkiot $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ muodostavat matriisin *päälävistäjän* eli *diagonaalin*.
5. *Yksikkömatriisi* on sellainen neliömatriisi, jonka päälävistäjän alkiot ovat ykkösiä ja muut alkiot nollia. Yksikkömatriisille käytetään merkintää I . Jos halutaan korostaa rivien lukumäärää, käytetään merkintää I_n .
6. *Nollamatriisi* O on matriisi, jonka jokainen alkio on nolla.

ESIMERKKI 1

a) Matriisit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ ja $C = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{4} & \frac{6}{2} \\ 2^2 & 5 & 2 \cdot 3 \end{pmatrix}$

ovat kaikki samaa tyyppiä 2×3 . Matriisit A ja C ovat samat, mutta A ja B eivät ole samat.

b) Matriisin $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ transponoitu matriisi on

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}. \text{ Matriisi } A \text{ on } 2 \times 3\text{-matriisi, ja } A^T \text{ on}$$

3×2 -matriisi.

c) Matriisi $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ on neliömatriisi, joka on tyyppiä

3×3 . Sen päälävistäjän muodostavat alkiot 2, -1 ja 0.

d) Matriiseista $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ vain

viimeinen on yksikkömatriisi. Sen merkinnäksi sopii I_3 , koska se on kolmirivinen yksikkömatriisi.

T E H T Ä V I Ä

1. Elintarvikkeiden hintavertailuun valittiin leivän, perunan ja sokerin kilogrammahinnat Suomessa ja Ruotsissa. Suomessa leipä maksoi 11,60 mk, peruna 2,90 mk ja sokeri 7,50 mk. Ruotsissa vastaavat hinnat olivat markkoiksi muutettuina 12,20 mk, 2,00 mk ja 4,50 mk. Taulukoi hintatiedot niin, että luvuista muodostuvia vaakarivejä on **a)** kaksi, **b)** kolme, ja muodosta taulukkoa vastaava matriisi.

2. Ilmoita matriisin $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ -4 & 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ **a)** tyyppi, **b)** vaakavektorit, **c)** pystyvektorit, **d)** alkio a_{21} , **e)** alkio a_{12} , **f)** alkio a_{22} .

3. Muodosta edellisessä tehtävässä annetun matriisin transpoosi.

4. Muodosta annetun matriisin transpoosi.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

5. Määritä matriisin **a)** I_n , **b)** I_n^T päälävistäjäalkioiden summa.

2 Matriisin kertominen luvulla

Matriiseille voidaan määritellä laskutoimituksia, ja niiden havaitaan noudattavan samanlaisia laskusääntöjä kuin tutut lukujen laskutoimitukset. Laskutoimituksista esitellään ensimmäisenä matriisin kertominen luvulla. Matriisilaskennassa lukuja sanotaan myös *skalaareiksi*.

Matriisin A ja luvun r tulolla rA tarkoitetaan sitä matriisiä, joka saadaan, kun matriisin A jokainen alkio kerrotaan luvulla r eli $rA = (ra_{ij})$.

Matriisia $-A = (-1)A = (-a_{ij})$ sanotaan A :n vastamatriisiksi.

ESIMERKKI 1

$$\text{Olkoon } A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Silloin } 3A = \begin{pmatrix} 12 & -6 & 0 \\ -3 & 9 & 15 \end{pmatrix} \text{ ja } -A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

ESIMERKKI 2

$$\text{Matriisin } \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & -7 & 2 \end{pmatrix} \text{ vastamatriisi on } \begin{pmatrix} -3 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ -4 & 0 & 7 & -2 \end{pmatrix}.$$

3 Matriisien yhteenlasku ja vähennyslasku

Samaa tyyppiä olevien matriisien A ja B summalla tarkoitetaan sitä matriisia, joka saadaan laskemalla yhteen A :n ja B :n vastinalkiot eli $A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$.

Matriisien A ja B erotuksella $A - B$ tarkoitetaan matriisia $A + (-B)$.

ESIMERKKI 1

a) Matriisien $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ ja $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}$ summa on

$$A + B = \begin{pmatrix} 4+1 & -2-3 & 0+5 \\ -1+4 & 3+7 & 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 5 \\ 3 & 10 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Matriisien $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ ja $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ summa ei ole määriteltä, koska matriisit eivät ole samaa tyyppiä.

Olkoot A , B ja C samaa tyyppiä olevia matriiseja sekä r ja s lukuja. Voidaan helposti osoittaa, että tällöin ovat voimassa seuraavat laskulait.

$$A + B = B + A$$

Vaihdantalaki

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

Liitälaki

$$A + O = A$$

Nollamatriisin ominaisuus

$$A + (-A) = O$$

Vastamatriisin ominaisuus

$$(r + s)A = rA + sA$$

$$r(A + B) = rA + rB$$

$$r(sA) = (rs)A$$

Matriisien välisiä yhtälöitä, joissa esiintyy yhteenlaskua, vähennyslaskua ja skalaarilla kertomista, voidaan käsitellä samaan tapaan kuin lukuyhtälöitä. Seuraava esimerkki havainnollistaa asiaa.

ESIMERKKI 2

Ratkaise matriisi X yhtälöstä $5X - \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Ratkaisu:

$$5X = 3 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 6 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 23 \end{pmatrix}$$

$$\text{Tästä } X = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0,4 \\ 2 & 4,6 \end{pmatrix}.$$

T E H T Ä V I Ä

6. Olkoon $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}$. Määritä **a)** $-A$, **b)** $2A$, **c)** $0,5A$.

7. Olkoon $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & -5 & -3 \end{pmatrix}$ ja $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 7 & -8 & -5 \end{pmatrix}$.

Määritä **a)** $A + B$, **b)** $A - B$, **c)** $3A - 2B$.

8. Ratkaise yhtälöstä luvut x ja y .

a) $\begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} x & 3 \\ 1 & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 8 & -8 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -1 & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 3x \\ -2 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

d) $3 \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & y \\ -2x & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -22 \\ -21 & -14 \end{pmatrix}$

9. Ratkaise yhtälöstä matriisi X .

a) $X + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $X - \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & -5 & -3 \end{pmatrix} - X = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 7 & -8 & -5 \end{pmatrix}$ **d)** $4X + 2 \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

10. Olkoon $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & -5 & -3 \end{pmatrix}$ ja $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 7 & -8 & -5 \end{pmatrix}$.

Määritä **a)** A^T ja B^T , **b)** $A^T + B^T$, **c)** $(A + B)^T$. Vertaa b- ja c-kohtien tuloksia. Mitä huomaat?

4 Matriisien kertolasku

ESIMERKKI 1

Ville ja Venla joutuvat hankkimaan oheisen matriisin ilmoittaman määrän tuotteita A , B ja C . Hintamatriisista käy ilmi näiden yksikköhinnot markkoina kaupoissa I ja II . Kuinka paljon kummankin ostajan tuotteet tulisivat maksamaan näissä kaupoissa?

$$\begin{array}{rcc} & A & B & C \\ \text{Ville} & \begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} \\ \text{Venla} & \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcc} & I & II \\ A & \begin{pmatrix} 50 & 54 \end{pmatrix} \\ B & \begin{pmatrix} 16 & 19 \end{pmatrix} \\ C & \begin{pmatrix} 82 & 75 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ratkaisu:

Villen ostokset maksavat kaupassa I yhteensä $(5 \cdot 50 + 2 \cdot 16 + 6 \cdot 82)$ mk = 774 mk ja

kaupassa II yhteensä $(5 \cdot 54 + 2 \cdot 19 + 6 \cdot 75)$ mk = 758 mk, joten kauppaliike II on Villelle edullisempi.

Venlan ostokset maksavat kaupassa I yhteensä $(4 \cdot 50 + 3 \cdot 16 + 1 \cdot 82)$ mk = 330 mk ja

kaupassa II yhteensä $(4 \cdot 54 + 3 \cdot 19 + 1 \cdot 75)$ mk = 348 mk.

Venlalle edullisempi on kauppaliike I .

Tulokset voidaan ilmaista matriisina $\begin{pmatrix} 774 & 758 \\ 330 & 348 \end{pmatrix}$. Se on muodostettu kertomalla annetut matriisit keskenään seuraavan määritelmän mukaisesti.

Matriisin $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ja matriisin $B = (b_{ij})_{n \times p}$ tulolla tarkoitetaan matriisia $AB = (u_{ij})_{m \times p}$, jossa

$$u_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj}.$$

Huomaa, että kahden matriisin A ja B tulo on määritelty vain, kun matriisit ovat sopivaa tyyppiä niin, että A :n vaakarivillä on yhtä monta alkioita kuin B :n pystyrivillä. Jos matriisi A on tyyppiä $m \times n$ ja matriisi B tyyppiä $n \times p$, tulomatriisi AB on silloin tyyppiä $m \times p$. Tulomatriisin alkiot saadaan, kun A :n jokaisen vaakarivin alkioilla kerrotaan vuorollaan B :n jokaisen pystyrivin vastaavat alkiot ja tulot kunkin vaaka- ja pystyrivin osalta lasketaan yhteen. Menettely etenee vaiheittain seuraavasti:

1. Ensin A :n ensimmäisen vaakarivin alkioilla kerrotaan B :n ensimmäisen pystyrivin vastaavat alkiot ja tulot lasketaan yhteen. Näin saadaan tulon AB ensimmäisen vaakarivin ensimmäinen alkio.
2. Sitten A :n ensimmäisen vaakarivin alkioilla kerrotaan B :n toisen pystyrivin vastaavat alkiot ja tulot lasketaan yhteen. Näin saadaan tulon AB ensimmäisen vaakarivin toinen alkio.

3. Menettelyä jatketaan kunnes A :n ensimmäisen vaakarivin alkioidilla on kerrottu B :n viimeisenkin pystyrivin alkiot, jolloin on saatu tulon AB ensimmäinen vaakarivi.
4. Tämän jälkeen toistetaan edellä sanotut vaiheet 1–3 A :n toista vaakariviä käyttäen, jolloin saadaan tulon AB toinen vaakarivi.
5. Näin jatketaan, kunnes on käytetty A :n viimeistä vaakariviä ja saatu siten tulon AB viimeinen vaakarivi.

Havainnollistetaan tulomatriisin laskemista seuraavilla esimerkeillä. Kiinnitä huomio yllä olevien vaiheiden esiintymiseen tuloa laskettaessa.

ESIMERKKI 2

Muodostetaan matriisien $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ ja $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 0 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ tulo.

Suorituksessa on korostettu kulloinkin käsitellyssä oleva vaakarivi ja pystyrivi ja niistä saatu tulomatriisin alkio.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 0 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & & \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Vaakarivin ja pystyrivin} \\ \text{alkioiden tulo} \\ 1 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + (-2) \cdot 4 = -6 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 0 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -4 & \end{pmatrix} \quad 1 \cdot 7 + 3 \cdot (-3) + (-2) \cdot 1 = -4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 0 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -4 & 10 \end{pmatrix} \quad 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 5 + (-2) \cdot 2 = 10$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 0 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -4 & 10 \\ 20 & & \end{pmatrix} \quad 2 \cdot 2 + 5 \cdot 0 + 4 \cdot 4 = 20$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 0 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -4 & 10 \\ 20 & 3 & \end{pmatrix} \quad 2 \cdot 7 + 5 \cdot (-3) + 4 \cdot 1 = 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 0 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -4 & 10 \\ 20 & 3 & 31 \end{pmatrix} \quad 2 \cdot (-1) + 5 \cdot 5 + 4 \cdot 2 = 31$$

Esimerkissä laskettu matriisien $A_{2 \times 3}$ ja $B_{3 \times 3}$ tulo on tyyppiä

$$2 \times 3 \text{ oleva matriisi } \begin{pmatrix} -6 & -4 & 10 \\ 20 & 3 & 31 \end{pmatrix}.$$

ESIMERKKI 3

Kerrotaan vaakavektorilla $(-3 \ 4 \ 6)$ pystyvektori $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, jolloin

saadaan tulokseksi tyyppiä 1×1 oleva matriisi
 $(-3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot (-1)) = (0)$.

Tehtävä vastaa vektoreiden $-3\bar{i} + 4\bar{j} + 6\bar{k}$ ja $2\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}$ skalaaritulon eli pistetulon muodostamista. Koska tulos on 0, kyseiset vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

ESIMERKKI 4

Olkoon $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ ja $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Muodostetaan tulot AB ja BA .

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 1 \cdot 5 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ 3 \cdot 3 + (-1) \cdot 5 & 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \\ 5 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & 5 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 13 & 4 \end{pmatrix}$$

Molemmat tulot AB ja BA voidaan laskea vain silloin, kun A ja B ovat samankokoisia neliömatriiseja. Esimerkki 4 osoittaa kuitenkin, että tällöin saadut tulot AB ja BA eivät välttämättä ole samoja. Se merkitsee, että matriisitulo ei ole vaihdannainen. Sillä on kuitenkin useita muita tavallisen tulon ominaisuuksia. Matriisitulo noudattaa nimittäin seuraavia laskusääntöjä edellyttäen, että kyseiset lausekkeet ovat määriteltyjä.

$$A(BC) = (AB)C$$

Liitântälaki

$$A(B + C) = AB + AC$$

Osittelulaki

$$(A + B)C = AC + BC$$

Osittelulaki

$$IA = AI = A$$

Yksikkömatriisin ominaisuus

$$r(AB) = (rA)B = A(rB)$$

Skalaarin siirtosääntö

Yksikkömatriisin ominaisuus osoitetaan harjoitustehtävänä. Muiden laskulakien täsmällinen todistaminen sivuutetaan.

T E H T Ä V I Ä

11. Laske merkitty tulo.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 10 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

12. Ilmoita tulomatriisin AB tyyppi, mikäli tämä matriisi on määritelty.

a) $A_{2 \times 3} B_{3 \times 2}$ b) $A_{4 \times 3} B_{3 \times 6}$ c) $A_{2 \times 3} B_{2 \times 3}$
d) $A_{1 \times 3} B_{3 \times 3}$ e) $A_{4 \times 3} B_{2 \times 1}$ f) $A_{m \times s} B_{s \times n}$

13. Määritä tulot AB ja BA , kun $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$ ja $B = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

14. Ratkaise luvut x ja y .

a) $\begin{pmatrix} x & y \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 23 & 34 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & 2y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$

15. Olkoon $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -4 \\ 5 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ ja $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Laske

matriisitulo ABC . (Huomaa, että merkinnässä ABC ei tarvita sulkeita, sillä kertolaskun liitäntälain mukaan $A(BC) = (AB)C$.)

16. Matkanjärjestäjä tarjoaa kaupunkilomaa varten kolme eri vaihtoehtoa alla olevan taulukon mukaisesti. Yöpyminen maksaa 250 mk, tutustuminen nähtävyyteen 120 mk ja ateria 80 mk. Muodosta kustannusvektori K ja taulukkoa vastaava matriisi M ja laske niiden tulo KM . a) Mikä on tulon alkioden merkitys? b) Mikä vaihtoehtoista A , B ja C on edullisin?

	A	B	C
yöpymiset	4	3	5
nähtävyydet	3	4	4
ateriat	5	7	0

17. Lukion Eurooppa-kurssi hankki matkansa rahoittamiseksi tuotteita myyntiin. Alla olevasta taulukosta käyvät ilmi kullekin oppilaalle eri vuosiluokilla *I*, *II* ja *III* myytäväksi annetut tuotemäärät ja näiden yksikköhinnat. Kurssilla oli 8 ensimmäisen, 12 toisen ja 5 kolmannen vuosiluokan oppilasta.

	<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	Hinta (mk)
kansiot	2	5	3	25
korut	0	7	6	30
kynät	8	2	12	15
käsineet	3	4	2	12
lakit	4	0	3	20

Olkoon K taulukkoa vastaava lukumäärämatriisi. Laske tulo $(8 \ 12 \ 5)K^T(25 \ 30 \ 15 \ 12 \ 20)^T$ ja tulkitse, mitä se ilmoittaa.

18. a) Olkoon $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$. Laske tulo AA^T .
 b) Osoita, että tulo AA^T on määritelty kaikille matriiseille A .
19. a) Osoita, että I_3 toteuttaa yhtälön $IA = AI = A$ kaikilla 3×3 -matriiseilla A .
 b) Osoita, että I_n toteuttaa yhtälön $IA = AI = A$ kaikilla $n \times n$ -matriiseilla A .
20. Todista 2×2 -matriiseille kertolaskun osittelulait $A(B+C) = AB+AC$ ja $(A+B)C = AC+BC$.
21. Matriisitulo noudattaa laskulakia $(AB)^T = B^T A^T$. Todista tämä 2×2 -matriiseille A ja B .
22. Kuinka monta kertolaskua tarvitaan a) 2×3 - ja 3×2 -matriisien, b) $m \times n$ - ja $n \times p$ -matriisien tulon laskemiseksi?

5 Matriisin potenssi

Kertolaskun liitäntälain mukaan kolmen matriisin tulo voidaan kirjoittaa ilman sulkeita muodossa ABC . Vastaavasti voidaan menetellä vielä useammankin matriisin tapauksessa edellyttäen tietenkin, että matriisien tyypit sopivat yhteen. Jos kaikki tekijämatriisit ovat

samoja ja lisäksi neliömatriiseja, niiden tulo voidaan laskea ja se voidaan merkitä potenssina lukujen tapaan. Tähän liittyy seuraava määritelmä.

Jos A on $n \times n$ -matriisi, sen *potenssi* A^p tarkoittaa tuloa $AA \dots A$, jossa on p tekijää, $p \geq 2$. Lisäksi sovitaan, että $A^1 = A$ ja $A^0 = I_n$.

Matriisin potenssi noudattaa samankantaisten potenssien kertosääntöä ja potenssin potenssin laskusääntöä, joten

$$A^p A^q = A^{p+q} \text{ ja } (A^p)^q = A^{pq} \quad (p, q \in \mathbb{N}).$$

Nämä kaavat voidaan todistaa aivan samoin kuin lukujen vastaavat kaavat. Potenssikaava $(AB)^p = A^p B^p$ ei sitä vastoin ole yleisesti voimassa (ks. tehtävä 29).

ESIMERKKI 1

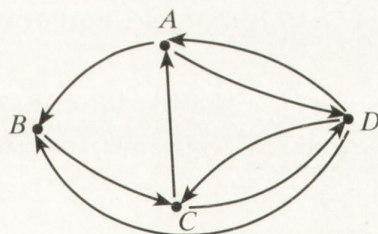
Olkoon $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Silloin $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-8 & -6-2 \\ 12+4 & -8+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 16 & -7 \end{pmatrix}$ ja

$$A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 16 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-32 & -24+14 \\ 4+16 & -32-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -29 & -10 \\ 20 & -39 \end{pmatrix}.$$

ESIMERKKI 2

Henkilöillä A, B, C ja D on matkapuhelimet, mutta niiden erilaisuuden tai heikon kuuluvuuden takia kaikki eivät saa yhteyttä kaikkiin muihin. Alla oleva nuolikuviointi ilmaisee, kuka henkilöistä saa yhteyden kehenkin. Esimerkiksi A saa suoraan yhteyden B :hen, mutta ei päinvastoin. Merkitään kuvion tiedot matriisiksi M , jonka alkioina ovat 1 tai 0 sen mukaan, saadaanko yhteys suoraan vai ei.



		Mihin			
		A	B	C	D
Mistä	A	0	1	0	1
	B	0	0	1	0
	C	1	0	0	1
	D	1	1	1	0

Muodostetaan nyt matriisin M neliö.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriisin M alkio a_{21} on 0, mikä merkitsee, että B ei saa suoraan yhteyttä A :han. Matriisin M^2 vastaava alkio on 1. Se voidaan nyt tulkita niin, että B saa välillisesti yhteyden A :han yhdellä tavalla. Näin todella on myös nuolikuvion mukaan. Nimittäin B voi soittaa C :lle ja C edelleen A :lle. Vastaavasti alkion a_{13} arvo 2 tulkitaan niin, että A saa välillisesti yhteyden C :hen kahta eri kautta. Näin onkin nuolikuvion mukaan, sillä A voi soittaa B :lle ja B edelleen C :lle, tai A voi soittaa D :lle ja D edelleen C :lle. Tarkista vastaavalla tavalla alkion a_{32} merkitys. Käytettyä nuolikuviota sanotaan *suunnatuksi verkoksi* tai *digraafiksi* (directed graph).

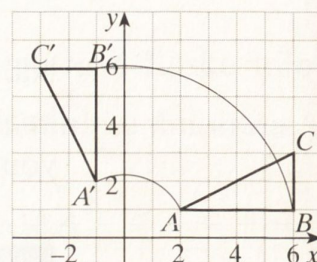
ESIMERKKI 3

Kolmio $A(2,1)B(6,1)C(6,3)$ voidaan esit-

tää matriisina $K = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Kun tämä

matriisi kerrotaan matriisilla $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, saadaan

$$RK = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix} = K'.$$



Tuloksena on kolmio $A'(-1,2)B'(-1,6)C'(-3,6)$. Kuvasta nähdään, että kertominen sai aikaan kolmion ABC kiertymisen origon ympäri positiiviseen suuntaan 90° . Toistamiseen R :llä kertominen aiheuttaa puolestaan kolmion $A'B'C'$ kiertymisen 90° eli alkuperäisen kolmion ABC kiertymisen 180° . Näin kierretty kolmio saadaan tulona $RK' = R^2K$. Vastaavasti 270° :n kierto positiiviseen suuntaan antaa kolmion R^3K ja 360° :n kierto kolmion $R^4K = K$ (Totea!).

Voidaan osoittaa, että koordinaatiston pistejoukko kiertyy origon ympäri α astetta, kun kerroinmatriisina on $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$. Aiheeseen palataan tason lineaarikuvausten yhteydessä.

T E H T Ä V I Ä

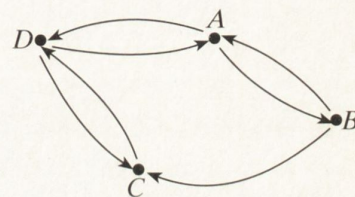
23. Määritä A^2 ja A^4 , kun $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

24. Laske A^2 , kun A on a) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

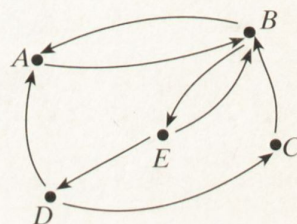
25. Olkoon $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Määritä A^2 ja A^3 ja esitä ne muodossa kA , $k \in \mathbb{R}$.
26. Määritä jokin 2×2 -matriisi A , joka ei ole nollamatriisi, mutta jonka neliö on nollamatriisi.
27. Määritä $(A + B)^2$ ja $A^2 + 2AB + B^2$, kun
- a) $A = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ja $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Mitä voidaan a- ja b-kohtien tulosten perusteella päätellä matriisiyhtälön $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ voimassaolosta?
28. Olkoot A ja B saamaa tyyppiä olevia neliömatriiseja. Selvitä, onko matriisiyhtälö $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ yleisesti voimassa?

29. Osoita matriiseja $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ ja $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ käyttäen, että potenssikaava $(AB)^p = A^p B^p$, $p \in \mathbb{N}$, ei ole yleisesti voimassa.

30. Oheinen digraafi kuvaa esimerkin 2 tavoin, miten henkilöt A, B, C ja D saavat yhteyden toiseen saman ryhmän henkilöön. Muodosta digraafia vastaava matriisi M ja laske matriisi M^2 . Kuinka monella eri tavalla yhden välittäjähenkilön kautta a) C saa yhteyden B :hen, b) B saa yhteyden D :hen?



31. Oheinen digraafi esittää lentoyhteyksiä kaupunkien A, B, C, D ja E välillä. Kuvan mukaan esimerkiksi A :sta pääsee ilman välilaskua B :hen mutta ei C :hen. Muodosta digraafia vastaava matriisi M ja laske matriisi M^2 . Kuinka monta yhden välilaskun sisältävää yhteyttä on a) kaupungista E kaupunkiin C , b) kaupungista D kaupunkiin B , c) kaupungista D kaupunkiin E ?



32. Tarkastellaan edellisen tehtävän lentoyhteyksiä kaupunkien A, B, C, D ja E välillä. Matriisista M^2 nähdään, kuinka monta yhden välilaskun sisältävää yhteyttä on kaupungista toiseen. Vastaavasti matriisin M^3 alkiot ilmoittavat, kuinka monta kaksi välilaskua sisältävää yhteyttä on kaupungista toiseen. Selvitä, kuinka monta tällaista yhteyttä on a) kaupungista B kaupunkiin C , b) kaupungista D kaupunkiin E , c) kaupungista C kaupunkiin E , d) kaupungista E kaupunkiin B ? Miksi kaikki d-kohdan yhteydet eivät ole tarkoituksenmukaisia?

33. Mitä esimerkin 2 tapauksessa ilmoittaa matriisi
a) $M + M^2$, **b)** $M + M^2 + M^3$?
34. Mikä kolmio on tuloksena, kun kolmio $A(1, 2)B(4, 1)C(2, 4)$ kiertyy origon ympäri positiiviseen suuntaan **a)** 90° , **b)** 180° , **c)** 270° ?
- *35. Kolmio $A(2, 1)B(6, 1)C(6, 3)$ kiertyy origon ympäri positiiviseen suuntaan 45° , jolloin tuloksena on kolmio $A'B'C'$. Määritä tämän kolmion kärkipisteiden koordinaatit.

6 Käänteismatriisi

Jos a ja b ovat reaalityyppisiä lukuja ja niiden tulo $ab = 1$, luvut a ja b ovat toistensa käänteislukuja. Luvun a käänteisluku on siis $b = \frac{1}{a} = a^{-1}$. Myös matriisien teoriassa käänteismatriisin käsite määritellään tuloa käyttäen:

Olkoon A neliömatriisi. Jos on olemassa sellainen neliömatriisi B , että

$$AB = I \text{ ja } BA = I \text{ (} I \text{ on yksikkömatriisi),}$$

niin merkitään $B = A^{-1}$ ja sanotaan, että matriisi A on säännöllinen (tai kääntyvä) ja B on A :n käänteismatriisi.

Säännöllisellä matriisilla ei voi olla useita käänteismatriiseja. Jos nimittäin B' olisi B :n ohella toinen matriisin A käänteismatriisi, niin

$$B' = B'I = B'(AB) = (B'A)B = IB = B.$$

B' ja B ovat siis samoja, eli käänteismatriisi on yksikäsitteinen.

Huomautus: Käänteismatriisin määritelmä sisältää molemmat ehdot $AB = I$ ja $BA = I$. Voidaan todistaa, että yksikin ehto riittäisi, eli jos esimerkiksi neliömatriisien tulo $AB = I$, niin silloin myös $BA = I$.

ESIMERKKI 1

Matriisin $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$ käänteismatriisi on $\begin{pmatrix} 5 & -1,5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, sillä

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1,5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 5 + 3 \cdot (-3) & 2 \cdot (-1,5) + 3 \cdot 1 \\ 6 \cdot 5 + 10 \cdot (-3) & 6 \cdot (-1,5) + 10 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ESIMERKKI 2

Matriisilla $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ei ole käänteismatriisia. Nimittäin jos $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on mikä tahansa 2×2 -matriisi, niin tulo

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$ ei voi olla yksikkömatriisi, koska pitäisi olla samalla kertaa $a+c=1$ ja $a+c=0$.

Käänteismatriisin määrittäminen eli matriisin *kääntäminen* on työläs tehtävä, jos rivien lukumäärä on suuri. Tällöin voi käyttää apuna matematiikkaohjelmia tai laskimen matriisitoimintoja. Jos matriisi on tyyppiä 2×2 , sen käänteismatriisille saadaan helposti laskukaava seuraavalla tavalla:

Olkoon $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ säännöllinen matriisi ja $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}$ sen käänteismatriisi. Silloin $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bu & ay+bv \\ cx+du & cy+dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, josta

$$\begin{cases} ax+bu=1 \\ cx+du=0 \end{cases} \text{ ja } \begin{cases} ay+bv=0 \\ cy+dv=1 \end{cases}.$$

Edellisestä yhtälöparista saadaan $x = \frac{d}{ad-bc}$ ja $u = \frac{-c}{ad-bc}$, ja

jälkimmäisestä $y = \frac{-b}{ad-bc}$ ja $v = \frac{a}{ad-bc}$.

Saadut käänteismatriisin alkiot ovat murtolausekkeita, joiden nimittäjät ovat samat. Siksi käänteismatriisi voidaan kirjoittaa muotoon

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Välittömästi nähdään, että jos $ad-bc=0$, niin matriisilla $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ei ole käänteismatriisia.

ESIMERKKI 3

Matriisin $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ käänteismatriisi on

$$A^{-1} = \frac{1}{4 \cdot 5 - 3 \cdot 6} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 & -1,5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Matriisilla $B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$ ei ole käänteismatriisia, koska $6 \cdot 3 - 2 \cdot 9 = 0$.

Jos A ja B ovat samaa tyyppiä olevia säännöllisiä neliömatriiseja, niin seuraavat yhtälöt ovat voimassa:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Ensimmäisessä yhtälössä väitetään, että A^{-1} :n käänteismatriisi on A , jolloin tulee olla $A^{-1}A = AA^{-1} = I$. Tämä on toisaalta tosi A :n käänteismatriisin määritelmän nojalla.

Toisen yhtälön väite on, että A^T :n käänteismatriisi on $(A^{-1})^T$. Tämä on tosi, koska $A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I$ ja $(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I^T = I$ (Ks. tehtävä 21).

Kolmannen lauseen todistamisessa käytetään käänteismatriisin määritelmää ja matriisitulon liitântälakia. Niiden mukaan

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I \text{ ja}$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I. \text{ Tämä osoittaa myös kolmannen lauseen todeksi.}$$

TEHTÄVIÄ

36. Mikä matriiseista **a)** $\begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, **b)** $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$, **c)** $\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ on matriisin $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ käänteismatriisi?

37. Osoita, että matriisin $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ käänteismatriisi on $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

38. Osoita, että matriisi $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ on itsensä käänteismatriisi.

39. Tutki, onko matriisi

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$, **b)** $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, **c)** $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$, **d)** $\begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ säännöllinen vai ei. Myönteisessä tapauksessa määritä käänteismatriisi.

40. Osoita, että matriisi $\begin{pmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{pmatrix}$ on säännöllinen ja määritä sen käänteismatriisi.

41. Millä x :n arvoilla matriisi $\begin{pmatrix} x & -2 \\ 3 & 1-x \end{pmatrix}$ on kääntyvä?

42. Olkoon $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$. Muodosta A^{-1} ja osoita, että

a) $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, **b)** $(A^{-1})^{-1} = A$.

43. Muodosta laskimen tai tietokoneen avulla matriisin käänteismatriisi.

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -5 & -4 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

44. Neliömatriisi A on *ortogonaalinen*, jos se on kääntyvä ja $A^{-1} = A^T$.

Onko matriisi **a)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, **b)** $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, **c)** $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ortogonaalinen?

45. Osoita, että matriisi $\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$, on ortogonaalinen.

46. Olkoon $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ja $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Määritä matriisit

$(AB)^T$ ja $B^T A^T$ ja vertaa niitä toisiinsa.

47. Olkoon $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. Määritä matriisit $(A^T)^{-1}$ ja $(A^{-1})^T$ ja

vertaa niitä toisiinsa.

7 Determinantti

Tyyppiä 2×2 olevan matriisin $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *determinantti* $\det A$ on reaalityyppi, joka määritellään yhtälöllä

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Tämä determinantti on matriisin tyyppin mukaan *kaksirivinen determinantti*. Luvut a, b, c ja d ovat determinantin *alkioita*.

Kaksirivistä suuremmat determinantit määritellään aina edellisten avulla: *kolmirivinen determinantti* kaksirivisten avulla, *nelirivinen determinantti* kolmirivisten avulla jne. Kolmirivinen determinantti määritellään yhtälöllä

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}.$$

Tässä määritelmässä kolmirivinen determinantti on palautettu kaksiriviseksi determinanteiksi *kehittämällä* se ensimmäisen vaakarivin suhteen. Kullakin kyseisen vaakarivin alkiolla a, b ja c on vuorollaan kerrottu se *alideterminantti*, joka saadaan, kun determinantista poistetaan kertoja-alkion sisältävä rivi ja sarake.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} \cancel{d} & \cancel{e} & \cancel{f} \\ \cancel{g} & \cancel{h} & \cancel{i} \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} \cancel{a} & \cancel{f} & \cancel{i} \\ \cancel{d} & \cancel{g} & \cancel{h} \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} \cancel{a} & \cancel{d} & \cancel{g} \\ \cancel{e} & \cancel{h} & \cancel{i} \end{vmatrix}$$

Saadut tulot on varustettu vuoron perään plus- ja miinusmerkeillä.

Vastaavalla tavalla determinantti voidaan kehittää minkä tahansa rivin tai sarakkeen suhteen. Voidaan osoittaa, että näin saadaan determinantin arvo, kunhan alkion ja siihen kuuluvan alideterminantin tulo varustetaan aina sillä etumerkillä, joka määräytyy alkion paikan mukaan seuraavasti:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

ESIMERKKI 1

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 4 = -5$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & 3 \end{vmatrix} &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (12 - (-5)) - 3 \cdot (-6 - 0) + 2 \cdot (10 - 0) \\ &= 17 + 18 + 20 \\ &= 55 \end{aligned}$$

- c) Laskemisen helpottamiseksi determinantti kannattaa kehittää sen rivin suhteen, jossa on eniten nollia. Lasketaan seuraava determinantti kehittämällä se kolmannen vaakarivin suhteen.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} &= 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 3 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 0) \\ &= 3 \cdot (6 - 8) + 2 \cdot (4 - 4) - 1 \cdot (2 - 0) \\ &= -6 - 2 = -8 \end{aligned}$$

Kolmirivinen determinantti voidaan laskea mukavasti *Sarrus'n säännön* avulla. Determinantin perään kirjoitetaan sen kaksi ensimmäistä pystyriviä, lasketaan yhteen vinottain otetut tulot vasemmalta ylhäältä oikealle alas ja vähennetään tulot oikealta ylhäältä vasemmalle alas seuraavasti:

$$\begin{array}{ccccccc} a & b & c & a & b & & \\ d & e & f & d & e & & \\ g & h & i & g & h & & \\ \hline & - & - & + & + & + & \end{array} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

Säännön voi todeta oikeaksi laskemalla determinantti määritelmän mukaisesti.

ESIMERKKI 2

Lasketaan esimerkin 1 b-kohdan determinantti Sarrus'n säännöllä.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & 3 \end{vmatrix} &= 1 \cdot 4 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) \cdot (-5) - 2 \cdot 4 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot (-5) - 3 \cdot (-2) \cdot 3 \\ &= 12 + 0 + 20 - 0 + 5 + 18 = 55 \end{aligned}$$

Voidaan osoittaa, että determinanteille ovat voimassa seuraavat laskusäännöt:

1. Determinantin arvo ei muutu, jos determinantti *transponoidaan*, toisin sanoen rivit muutetaan sarakkeiksi niiden järjestys säilyttäen.
2. Determinantin arvo ei muutu, jos johonkin riviin lisätään toisen rivin monikerta. Sama pätee myös sarakkeisiin.
3. Jos determinantissa kaksi riviä vaihdetaan keskenään, determinantti muuttuu vastaluvukseen. Sama pätee myös sarakkeisiin.
4. Kahden samaa tyyppiä olevan neliömatriisin A ja B tulon AB determinantti on sen tekijöiden determinanttien tulo, toisin sanoen $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Ensimmäinen sääntö merkitsee, että neliömatriisin A ja sen transponoidun matriisin A^T determinantit ovat samat: $\det A = \det A^T$.

Toista sääntöä voidaan käyttää hyödyksi niin, että hankitaan sen avulla jollekin riville tai sarakkeelle mahdollisimman monta nollaa ja kehitetään sitten determinantti tämän rivin tai sarakkeen suhteen.

Kolmannesta säännöstä seuraa välittömästi, että jos determinantissa on kaksi identtistä riviä tai saraketta, determinantin arvo on nolla. Nimittäin identtisten rivien tai sarakkeiden vaihtaminen ei tietenkään muuta determinanttia, mutta säännön 2 mukaan se kuitenkin muuttuu vastaluvukseen. Ainoa mahdollisuus on silloin, että determinantin arvo on nolla.

Voidaan osoittaa, että

Neliömatriisilla A on käänteismatriisi vain, jos $\det A \neq 0$.

Laskemalla on helppo todeta, että yksikkömatriisin I determinantti on 1. Jos neliömatriisilla A on käänteismatriisi A^{-1} , niin $AA^{-1} = I$, jolloin neljännen laskusäännön mukaan $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$. Koska $\det A \neq 0$, niin $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

ESIMERKKI 3

Tutki, onko matriisilla $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ käänteismatriisi.

Ratkaisu:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 + 1 + 0 - 0 - (-4) - 0 = 5$$

Koska $\det A \neq 0$, matriisilla A on käänteismatriisi.

T E H T Ä V I Ä

48. Määritä determinantin arvo.

a) $\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

49. Määritä determinantin arvo.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 5 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

50. Määritä determinantin arvo.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 7 & 6 & 5 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & 8 \end{vmatrix}$

51. Tutki, onko matriisilla $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix}$ käänteismatriisi.

52. Millä a :n arvoilla matriisilla $\begin{pmatrix} a & -1 & 2 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ on käänteismatriisi?

53. Laske $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 6 & -1 \\ 2 & 4 & -5 & 2 \end{vmatrix}$ lisäämällä ensin kolmanteen sarakkeeseen

ensimmäinen sarake kerrottuna 2:lla ja sitten neljänteen sarakkeeseen ensimmäinen sarake kerrottuna 3:lla.

54. Kehitä determinantti $\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix}$ ensimmäisen vaakarivin suhteen.

($\bar{i}$, $\bar{j}$ ja $\bar{k}$ ovat kolmiulotteisen avaruuden yksikkövektoreita.)

55. Osoita, että yhtälöryhmän $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ ratkaisu voidaan esittää

muodossa $x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}, y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}},$ kun $\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \neq 0$

(Cramerin sääntö).

56. Todista laskusääntö $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ muotoa 2×2 oleville matriiseille A ja B .

*57. Selvitä, mikä on kolmirivisen determinantin $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$ geo-

metrinen merkitys, kun $\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$, $\bar{b} = b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}$ ja $\bar{c} = c_x \bar{i} + c_y \bar{j} + c_z \bar{k}$ ovat samasta pisteestä alkavia avaruuden vektoreita.

Lineaariset yhtälöryhmät

1 Ratkaisun olemassaolo

Yhtälöä sanotaan *lineaariseksi*, jos se on ensimmäistä astetta jokaisen siinä esiintyvän tuntemattoman suhteen. Esimerkiksi $2x = 5$ on yhden tuntemattoman, $x - 3y = 6$ on kahden tuntemattoman ja $3x + y - 2z = 5$ kolmen tuntemattoman lineaarinen yhtälö. Yleisesti $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ on n :n tuntemattoman $x_1, x_2, \dots, x_n$ lineaarinen yhtälö. Lukuja $a_1, a_2, \dots, a_n$ sanotaan yhtälön *kertoimiksi* ja lukua b *vakiotermiksi*. Jos $b = 0$, yhtälöä sanotaan *homogeeniseksi*. Tuntemattomia kutsutaan joskus myös *muuttujiksi*.

Lineaarinen *yhtälöryhmä* koostuu yhdestä tai useammasta lineaarisesta yhtälöstä. Yhtälöryhmän *ratkaisulla* tarkoitetaan niitä tuntemattomien $x_1, x_2, \dots, x_n$ arvoja $x_1', x_2', \dots, x_n'$, jotka toteuttavat yhtälöryhmän jokaisen yhtälön. Perimmäisenä tarkoituksena on yhtälöryhmän ratkaisun etsiminen eli sen *ratkaiseminen*.

Lineaarinen yhtälö $ax + by = c$ esittää tunnetusti xy -tason suoraa. Tämän suoran jokaisen pisteen koordinaatit toteuttavat kyseisen yhtälön. Lineaarinen yhtälöryhmä $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ esittää vastavasti kahta suoraa. Jos nämä suorat leikkaavat, yhtälöryhmällä on tarkalleen yksi ratkaisu, nimittäin leikkauspisteen (x', y') koordinaatit. Jos suorilla ei ole yhteisiä pisteitä, yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua. Jos taas suorat yhtyvät, ratkaisuja on äärettömän monta käsittäen kyseisen suoran kaikkien pisteiden koordinaatit.

ESIMERKKI 1

- a) Yhtälöryhmän $\begin{cases} x - 3y = 6 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ ratkaisu on $x = 3, y = -1$.

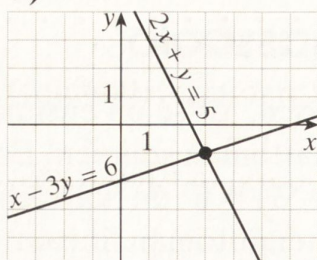
(Totea!) Ratkaisu tarkoittaa geometrisesti suorien $x - 3y = 6$ ja $2x + y = 5$ leikkauspistettä.

- b) Yhtälöryhmällä $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 4x + 6y = 7 \end{cases}$ ei ole ratkaisuja, sillä yhden-suuntaisilla suorilla $2x + 3y = 6$ ja $4x + 6y = 7$ ei ole yhteisiä pisteitä.

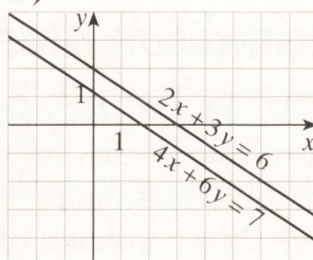
- c) Yhtälöryhmällä $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 4x + 6y = 12 \end{cases}$ on äärettömän monta ratkaisua, koska yhtälöt $2x + 3y = 6$ ja $4x + 6y = 12$ esittävät samaa suoraa. Jälkimmäinen yhtälö saadaan edellisestä 2:lla kertomalla.

Yhtälöryhmien esittämät suorat on piirretty alla olevaan kuvaan.

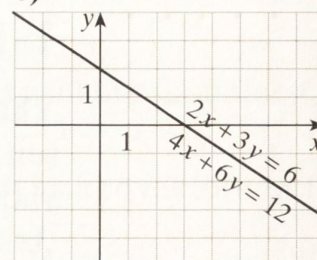
a)



b)



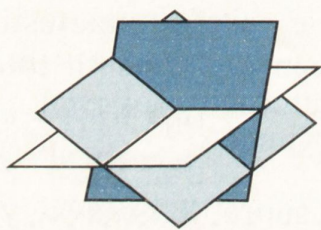
c)



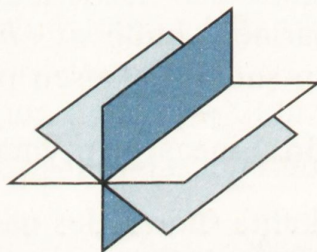
Kolmen tuntemattoman lineaarinen yhtälö $ax + by + cz = d$ esittää xyz -avaruuden tasoa. Lineaarisella yhtälöryhmällä

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$
 on näin ollen ratkaisuja sen mukaan, miten

yhtälöiden esittämät kolme tasoa sijoittuvat toisiinsa nähden avaruudessa. Eri tapaukset ja niitä vastaavat ratkaisujen lukumäärät on esitetty alla olevassa kuvassa.



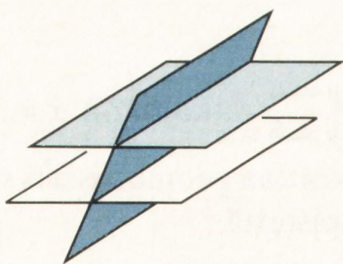
Tasot leikkaavat samassa pisteessä: tarkalleen yksi ratkaisu.



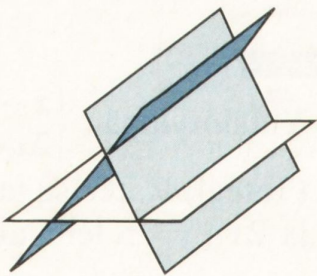
Tasot leikkaavat samaa suoraa pitkin: äärettömän monta ratkaisua.



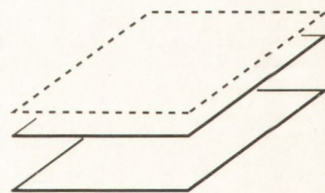
Kaikki tasot yhtyvät: äärettömän monta ratkaisua.



Tasot leikkaavat kahta yhdensuuntaista suoraa pitkin: ei ratkaisuja.



Tasot leikkaavat kolmea yhdensuuntaista suoraa pitkin: ei ratkaisuja.



Kaikki tasot yhden-suuntaiset tai kaksi tasoa yhtyy ja kolmas on niiden suuntainen: ei ratkaisuja.

Edellä esiteltyt lineaariset yhtälöryhmät ovat olleet sellaisia, joissa tuntemattomia on ollut kaksi tai kolme ja yhtälöitä yhtä monta kuin tuntemattomia. Jos tuntemattomia on enemmän kuin kolme, yhtälöryhmien ratkaisuja ei voi havainnollistaa geometrisesti. Yhtälöryhmässä voi yhtälöitä ja tuntemattomia olla myös eri määrä. Ratkaisujen lukumäärät noudattavat kuitenkin jo esille tulleita vaihtoehtoja seuraavien lauseiden mukaisesti:

Jos yhtälöitä on yhtä monta tai enemmän kuin tuntemattomia, ratkaisuja voi olla 0, 1 tai äärettömän monta.

Jos yhtälöitä on vähemmän kuin tuntemattomia, ratkaisuja voi olla 0 tai äärettömän monta.

Lauseiden perusteluun palataan myöhemmin (ks. s. 42).

ESIMERKKI 2

$$\text{Ratkaise yhtälöryhmä } \begin{cases} x - 3y = 6 \\ 2x + y = 5 \\ x + 2y = 3. \end{cases}$$

Ratkaisu:

Esimerkin 1 mukaan yhtälöryhmän $x - 3y = 6$ ja $2x + y = 5$ ratkaisu on $x = 3$, $y = -1$. Sijoitetaan tämä ratkaisu kolmanteen yhtälöön, jolloin saadaan epätosi yhtälö $3 + 2 \cdot (-1) = 3$. Se merkitsee, että yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua. Tulos on hyvin tyypillinen juuri silloin, kun yhtälöitä on enemmän kuin tuntemattomia. Mieti, mitä tämän esimerkin tulos merkitsee geometrisesti tulkittuna.

ESIMERKKI 3

$$\text{Ratkaise yhtälöryhmä } \begin{cases} 2x + y + z = 11 \\ x - 2y + 8z = 3. \end{cases}$$

Ratkaisu:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 11 \\ x - 2y + 8z = 3 \end{cases} \cdot 2 \quad \begin{cases} 2x + y + z = 11 \\ x - 2y + 8z = 3 \end{cases} \cdot 1$$

$$\begin{cases} 2x + y + z = 11 \\ x - 2y + 8z = 3 \end{cases} \cdot 1 \quad \begin{cases} 2x + y + z = 11 \\ x - 2y + 8z = 3 \end{cases} \cdot (-2)$$

Kertomalla yhtälöt yllä merkityllä tavalla ja laskemalla sitten yhteen saadaan $5x + 10z = 25$ ja $5y - 15z = 5$ eli $x + 2z = 5$ ja $y - 3z = 1$. Näistä saadaan edelleen $x = 5 - 2z$ ja $y = 1 + 3z$. Tuntemattomalle z voidaan nyt valita mikä tahansa arvo $z \in \mathbb{R}$, jolloin $x = 5 - 2z$ ja $y = 1 + 3z$. Yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua.

Vastaus: $x = 5 - 2z$, $y = 1 + 3z$, $z \in \mathbb{R}$

Esimerkin 3 vastaus voidaan antaa myös vektorimuodossa.

Merkitään $z = t$, jolloin $x = 5 - 2t$, $y = 1 + 3t$. Yhtälöryhmän rat-

kaisu saadaan nyt muotoon $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Tämä yhtälö esit-

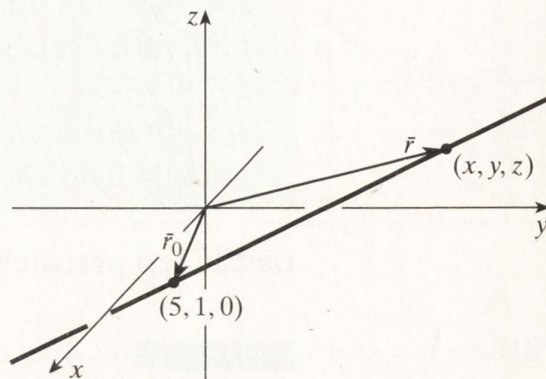
tää vektorimuodossa annettua avaruuden suoraa, tässä tapauksessa juuri tasojen $2x + y + z = 11$ ja $x - 2y + 8z = 3$ leikkaus-suoraa.

Viereinen kuva havainnollistaa tilannetta. Siinä

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ ja } \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

jolloin pisteitä $(5, 1, 0)$ ja (x, y, z) yhdistävä vektori

$$\text{on } t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$



TEHTÄVIÄ

Ratkaise lineaariset yhtälöryhmät tehtävissä 58–62.

58. a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = -10 \\ x - y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x + 2y = 20 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$

59. a) $\begin{cases} 3x + y = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ -6x + 2y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x + 3y = 1 \\ 3x - 9y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 10x - 10y = 3 \\ 4x - 2y = 1 \end{cases}$

60. a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 7 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 7 \\ x + 7y = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + 2y = 5 \\ 11x - 3y = 30 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 5y = -8 \\ x - y = 4 \\ 2x - 2y = 7 \end{cases}$

61. a) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + z = 1 \\ 3z = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x + y + z = 6 \\ x + y + 3z = 10 \end{cases}$

$$\text{c) } \begin{cases} 2x - 3y + z = 6 \\ x - y + z = 2 \\ x - y - 2z = 8 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ -y - 3z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

$$62. \text{ a) } \begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ x + y + z = 5 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ x + y + 2z = 5 \\ 2x + 4z = 10 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ -6x + 3y - 3z = 1 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

63. Millä a :n arvoilla yhtälöparilla ei ole ratkaisua?

$$\text{a) } \begin{cases} -x + 2y = a \\ 2x - 4y = 5 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 3x + ay = 5 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

64. Millä a :n arvoilla yhtälöparilla $\begin{cases} 4x + ay = 2 \\ ax + y = 1 \end{cases}$ on ratkaisuja

a) tarkalleen yksi, **b)** ei yhtään, **c)** äärettömän monta?

65. Laatikossa on kolmion, neliön ja viisikulmion muotoisia levyjä. Niitä on yhteensä 80 ja niissä on kaikkiaan 290 sivua. Kuinka monta kutakin levytyyppiä on laatikossa, kun kolmion muotoisia levyjä on 10 enemmän kuin neliön muotoisia?

66. Suorakulmaisen särmiön muotoinen laatikko on kaksi kertaa niin pitkä kuin leveä ja kaksi kertaa niin leveä kuin korkea. Mitkä ovat laatikon mitat, kun pituuden, leveyden ja korkeuden summa on 35 cm?

2 Yhtälöryhmän matriisimuoto

Monissa matematiikkaa käyttävissä tieteissä on ongelmia, joiden kuvaamiseen sopii jokin lineaarinen yhtälö tai yhtälöryhmä. Myös monet käytännön sovellukset, esimerkiksi teollisuusprosessien mallintaminen, johtavat lineaarisiin yhtälöryhmiin. Tällöin yhtälöitä voi olla hyvin paljon, jopa tuhansia. Yhtälöryhmä esitetään ja käsitellään tavallisesti *matriisimuodossa*. Esimerkiksi yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 = -2 \end{cases} \quad \text{matriisimuoto on} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

eli lyhyesti $AX = B$. Matriisi A on nimeltään *kerroinmatriisi* ja vektori B *vakiotermivektori*. Vektori X sisältää alkioinaan kaikki tuntemattomat. Laske yllä oleva matriisitulo ja totea, että matriisimerkintä on sopusoinnussa matriisitulon määritelmän ja kahden matriisin yhtäsuuruuden määritelmän kanssa.

Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaiseminen voidaan muuntaa matriisiyhtälön ratkaisemiseksi, sillä kaikki lineaariset yhtälöryhmät voidaan äskeisen esimerkin tapaan kirjoittaa matriisimuotoon. Jos A on säännöllinen matriisi, niin yhtälön $AX = B$ ratkaisu on $X = A^{-1}B$, sillä

$$AX = A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = IB = B.$$

Toisaalta, jos A on säännöllinen ja X toteuttaa yhtälön $AX = B$, niin

$$X = IX = (A^{-1}A)X = A^{-1}(AX) = A^{-1}B.$$

Näin ollen $X = A^{-1}B$ on yhtälön $AX = B$ ainoa ratkaisu. Näin on todistettu seuraava lause:

Jos lineaarisen yhtälöryhmän $AX = B$ kerroinmatriisi A on säännöllinen, niin yhtälöryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu $X = A^{-1}B$.

Kannattaa panna merkille, että matriisimuodossa esitetty lineaarinen yhtälöryhmä, jonka kerroinmatriisi on säännöllinen, ratkaistaan muodollisesti aivan samalla tavalla kuin tavallinen ensimmäisen asteen yhtälö $ax = b$. Ratkaiseminen voi vaikuttaa helpolta, mutta kuten sivulla 21 todettiin, käänteismatriisin laskeminen on usein työläs tehtävä eikä siihen ole mitään ”helppoa” menetelmää. Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaiseminen onkin vaikeudeltaan saman tason tehtävä kuin matriisin kääntäminen.

ESIMERKKI

Matriisin $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ käänteismatriisi on $\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Ratkaise tätä tietoa hyväksi käyttäen yhtälöryhmä $\begin{cases} x + 2y = -4 \\ 3x + 5y = 7 \end{cases}$.

Ratkaisu:

Matriisiyhtälön $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}X = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ ratkaisu on

$$X = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \cdot (-4) + 2 \cdot 7 \\ 3 \cdot (-4) + (-1) \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ -19 \end{pmatrix},$$

joten yhtälöryhmän ratkaisu on $x = 34$, $y = -19$.

Ratkaisu voidaan antaa myös muodossa $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ -19 \end{pmatrix}$ tai $(x \ y)^T = (34 \ -19)^T$.

T E H T Ä V I Ä

67. Kirjoita yhtälöryhmä matriisimuotoon.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} -x + y = 3 \\ 2x - y = 0 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x + 2y = 4 \\ y - z = -1 \\ 2x + z = 8 \end{cases} \\ \text{c)} \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -3x - y + 3z = 1 \end{cases} & \end{array}$$

68. Muodosta matriisin $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ käänteismatriisi ja ratkaise sitä käyttäen yhtälöryhmä.

$$\text{a)} \begin{cases} -2x + 3y = 4 \\ -3x + 4y = 1 \end{cases} \quad \text{b)} \begin{cases} -2x + 3y = 0 \\ -3x + 4y = -1 \end{cases} \quad \text{c)} \begin{cases} -2x + 3y = 10 \\ -3x + 4y = -10 \end{cases}$$

69. Tiedetään, että matriisin $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ käänteismatriisi on

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Ratkaise tätä tietoa hyväksi käyttäen yhtälöryhmä.}$$

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + 5y + 4z = 1 \\ 3x + 6y + 5z = 1 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + 5y + 4z = 5 \\ 3x + 6y + 5z = 0 \end{cases} \\ \text{c)} \begin{cases} x + y + z = -1 \\ 3x + 5y + 4z = -2 \\ 3x + 6y + 5z = -3 \end{cases} & \end{array}$$

70. Onko $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ yhtälöryhmän a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$$\text{b)} \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 4 & 15 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ c)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ratkaisu?}$$

3 Gaussin eliminointimenetelmä

Lineaariset yhtälöryhmät ratkaistaan tavallisesti niin, että alkuperäisestä yhtälöryhmästä muodostetaan yhtäpitäviä ryhmiä eliminomalla tuntemattomia. Menetelmä perustuu siihen tietoon, että yhtälöryhmän ratkaisu ei muutu eli saadaan yhtäpitävä yhtälöryhmä seuraavilla *alkeismuunnoksilla*:

- yhtälö kerrotaan nolasta eroavalla luvulla
- kahden yhtälön paikat vaihdetaan
- kaksi yhtälöä lasketaan yhteen

Tämä menetelmä systemaattisessa ja myös helposti tietokoneelle ohjelmoitavassa muodossa on ns. *Gaussin eliminointimenetelmä*. Siinä yhtälöryhmä saatetaan alkeismuunnoksilla ensin *porrasmuotoon*, josta ratkaisut on sitten helposti laskettavissa.

Yhtälöryhmä on porrasmuodossa silloin, kun yhtälöissä tuntemattomat ovat samassa järjestyksessä ja jokaisessa yhtälössä on, mikäli ylipäänsä mahdollista, enemmän ”alkunollia” kuin edellisessä yhtälössä. Alla olevat esimerkkikuvat esittävät kaavamaisesti porrasmuotoisia yhtälöryhmiä. Niissä yhtäsuuruusmerkin vasemmanpuoliset tähdet tarkoittavat termejä, joiden kertoimet eivät ole nollia. Yhtäsuuruusmerkin oikealla puolella olevat tähdet esittävät vakio-termejä, ja ne ovat mielivaltaisia reaalilukuja.

$$\left\{ \begin{array}{cccc} * & * & 0 & * & = & * \\ 0 & 0 & * & * & = & * \\ 0 & 0 & 0 & * & = & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & = & * \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{cccc} * & * & 0 & * & = & * \\ 0 & * & * & 0 & = & * \\ 0 & 0 & * & * & = & * \\ 0 & 0 & 0 & * & = & * \end{array} \right.$$

Porrasmuotoa sanotaan *kolmiomuodoksi*, jos yhtälöitä on yhtä monta kuin tuntemattomia ja k :nnessa yhtälössä on tarkalleen $k - 1$ alunollaa. Kuvassa oikeanpuolinen porrasmuoto on kolmiomuoto, vasemmanpuolinen ei. On ilmeistä, että kolmiomuodossa olevalla yhtälöryhmällä on täsmälleen yksi ratkaisu. Se saadaan takautuvilla sijoituksilla viimeisestä tuntemattomasta aloittaen.

ESIMERKKI 1

Ratkaistaan Gaussin eliminointimenetelmällä yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x - y - 2z = 5 \\ 2x + y + z = 3 \\ -2x + 4y + z = -2. \end{cases}$$

Säilytetään ensimmäinen yhtälö ja eliminoidaan sen avulla x muista yhtälöistä niin, että ensin kerrotaan ensimmäinen yhtälö -2 :lla, lisätään toiseen yhtälöön ja otetaan näin saatu yhtälö $3y + 5z = -7$ toiseksi yhtälöksi. Sitten kerrotaan ensimmäinen yhtälö 2 :lla, lisätään kolmanteen yhtälöön ja otetaan näin syntyvä yhtälö $2y - 3z = 8$ kolmanneksi yhtälöksi. Alla vasemmalla on merkitty yhtälöiden kertominen ja oikealla alkeismuunnoksilla saatu yhtäpitävä yhtälöryhmä.

$$\begin{cases} x - y - 2z = 5 \\ 2x + y + z = 3 \\ -2x + 4y + z = -2 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot (-2) \\ \cdot 1 \\ \cdot 1 \end{array} \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot 1 \\ \cdot 1 \end{array} \quad \begin{cases} x - y - 2z = 5 \\ 3y + 5z = -7 \\ 2y - 3z = 8 \end{cases}$$

Nyt käytetään toista yhtälöä $3y + 5z = -7$ ja eliminoidaan sen avulla y kolmannesta yhtälöstä $2y - 3z = 8$. Kerrotaan toinen yhtälö 2 :lla, kolmas -3 :lla, lasketaan yhteen ja otetaan tästä syntyvä yhtälö kolmanneksi yhtälöksi.

$$\begin{cases} x - y - 2z = 5 \\ 3y + 5z = -7 \\ 2y - 3z = 8 \end{cases} \begin{array}{l} \\ \cdot 2 \\ \cdot (-3) \end{array} \quad \begin{cases} x - y - 2z = 5 \\ 3y + 5z = -7 \\ 19z = -38 \end{cases}$$

Yhtälöryhmä on nyt kolmiomuodossa, josta heti ratkeaa $z = -2$. Sijoittamalla tämä edelliseen yhtälöön saadaan $y = 1$. Kun nämä sijoitetaan ensimmäiseen yhtälöön, saadaan $x = 2$.

Vastaus: $x = 2$, $y = 1$, $z = -2$

Gaussin eliminointimenetelmässä aina ylin käsiteltävä yhtälö on *tukiyhtälö*, joka jää ennalleen. Ensimmäisessä vaiheessa tukiyhtälönä on ylin yhtälö, toisessa vaiheessa toiseksi ylin jne. Kun yhtälöryhmä on saatu porrasmuotoon, ratkaistaan alin yhtälö ja sitten takautuvilla sijoituksilla sitä edeltävät yhtälöt. Menetelmä edellyttää joskus yhtälöiden paikkojen vaihtamista, kuten seuraavassa esimerkissä nähdään.

ESIMERKKI 2

Ratkaise yhtälöryhmä Gaussin eliminointimenetelmällä.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + y - 2z = 2 \\ x + 3y - z = 9 \\ -x + y + z = 5 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} y - z = 3 \\ -x - 2z = 0 \\ 2x - 5y = 12 \end{cases}$$

Ratkaisu:

a) Merkitään esimerkin 1 tapaan yhtälöiden kertominen ja yhteenlaskulla saadut uudet yhtälöt.

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 2 \\ x + 3y - z = 11 \\ -x + y + z = 5 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot (-2) \\ \cdot 2 \end{array}$$

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 2 \\ -5y = -20 \\ 3y = 12 \end{cases}$$

Toisesta ja kolmannelle yhtälöstä ratkeaa $y = 4$. Tuntemattomalle z voidaan valita mielivaltainen arvo $z \in \mathbb{R}$, jolloin ensimmäisestä yhtälöstä saadaan $x = \frac{1}{2}(2 - 4 + 2z) = -1 + z$.

Yhtälöryhmällä on siis äärettömän monta ratkaisua.

Vastaus: $x = -1 + z$, $y = 4$, $z \in \mathbb{R}$

b) Gaussin eliminointimenetelmää voidaan soveltaa, kun aluksi vaihdetaan ensimmäisen ja toisen yhtälön paikat.

$$\begin{cases} -x - 2z = 0 \\ y - z = 3 \\ 2x - 5y = 12 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \\ \cdot 1 \end{array}$$

$$\begin{cases} -x - 2z = 0 \\ y - z = 3 \\ -5y - 4z = 12 \end{cases} \begin{array}{l} \\ \cdot 5 \\ \cdot 1 \end{array}$$

$$\begin{cases} -x - 2z = 0 \\ y - z = 3 \\ -9z = 27 \end{cases}$$

Viimeisestä yhtälöstä saadaan $z = -3$ ja takautuvilla sijoituksilla $y = 0$ ja $x = 6$.

Vastaus: $x = 6$, $y = 0$, $z = -3$

T E H T Ä V I Ä

71. Ratkaise porrasmuotoinen yhtälöryhmä.

$$\text{a) } \begin{cases} -x + 3y - 2z = 0 \\ y - z = 7 \\ 2z = -34 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - z = 1 \\ y - z = 0 \\ 2z = 5 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x - z + u = 1 \\ y - u = 7 \\ 2z + u = 0 \\ -u = 6 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x + y - z + u = 1 \\ y - z = 7 \\ -3u = 15 \end{cases}$$

Ratkaise Gaussin eliminointimenetelmällä tehtävät 72–74.

$$\text{72. a) } \begin{cases} x - 4y - 3z = 6 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ -3x + 2y + 2z = -1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ x - 2y - 2z = -1 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$$

$$\text{73. a) } \begin{cases} x + y + z + u = 14 \\ 2x + 3y - 4z + 5u = 20 \\ 3x - 2y - 5z + 2u = -4 \\ 5x + 4y - 2z - 5u = 25 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x - y + z + 3u = 13 \\ 20y - 2z + u = 7 \\ x - 9y - z - u = 1 \\ 5z + 3u = -1 \end{cases}$$

$$\text{74. a) } \begin{cases} y - z = 1 \\ x - z = 2 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 4z - u = 11 \\ 2y - z + 2u = -5 \\ 2x + 3y + z = -1 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

75. Sovella Gaussin eliminointimenetelmää yhtälöryhmään ja osoita, ettei sillä ole ratkaisua.

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x + 3y + z = 5 \\ 3x + 5y + 2z = 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} -x + 2y + 2z + 2u = 10 \\ y + 3z + u = 5 \\ 3x - 2y + z - 2u = 0 \\ 2x - y + z - u = -1 \end{cases}$$

76. Ratkaise yhtälöryhmä.

$$\text{a) } \begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 2x + y - z = 1 \\ 2x - 3y + 3z = 5 \\ x - 2y + z = 3 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ x + z = 6 \end{cases}$$

77. Tutki Gaussin eliminointimenetelmällä yhtälöryhmän $AX = B$

$$\text{ratkaisun olemassaoloa, kun } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \\ 3 & 7 & 12 \end{pmatrix} \text{ ja } B = \begin{pmatrix} 9 \\ 24 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

78. Määritä pisteiden $(1, 9)$, $(3, -1)$ ja $(-1, -21)$ kautta kulkevan
a) paraabelin, b) ympyrän yhtälö.

4 Gaussin-Jordanin eliminointimenetelmä

Porrasmuotoisen lineaarisen yhtälöryhmän kunkin yhtälön ensimmäistä nollasta eroavaa kerrointa sanotaan *johtavaksi alkio*ksi ja vastaavaa tuntematonta *johtavaksi muuttujaksi*. Muut tuntemattomat ovat *vapaita muuttujia*. Lineaarisen yhtälöryhmän sanotaan olevan *pelkistetyssä porrasmuodossa*, jos se on porrasmuodossa ja jokainen johtava alkio on 1 ja tämä alkio on samalla ainoa kyseisen tuntemattoman nollasta eroava kerroin.

Lineaarisen yhtälöryhmän muuntaminen pelkistettyyn porrasmuotoon voidaan yleensä tehdä monella tavalla. Kuitenkin lopputulos on aina sama. Voidaan nimittäin osoittaa, että pelkistetty porrasmuoto on yksikäsitteinen muunnostavoista riippumatta.

ESIMERKKI 1

Lineaariset yhtälöryhmät

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \begin{cases} 3x - 2y + u = 1 \\ -z + 2u = 0 \\ -3u = 9 \\ 0 = 5 \end{cases} & \text{b)} \quad \begin{cases} x - 12z = 8 \\ y = 7 \\ u = 9 \end{cases} \\ \\ \text{c)} \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = 15 \\ z = 3,5 \\ u = -9 \end{cases} & \end{array}$$

ovat kaikki porrasmuotoisia. Kohdan a yhtälöryhmässä johtavia alkioita ovat 3, -1 ja -3 ja johtavia muuttujia x , z ja u , kun taas y on vapaa muuttuja. Kohtien b ja c yhtälöryhmät ovat pelkistetyssä porrasmuodossa. Kohdassa b johtavia muuttujia ovat x , y ja u , jota vastoin z on vapaa muuttuja. Kohdassa c kaikki tuntemattomat ovat johtavia muuttujia. Tällöin pelkistetyn yhtälöryhmän ratkaisu nähdään suoraan.

Lineaarinen yhtälöryhmä ratkaistaan *Gaussin-Jordanin eliminointimenetelmällä* niin, että yhtälöryhmä saatetaan ensin porrasmuotoon. Sen jälkeen eliminoidaan jokaisen johtavan muuttujan yläpuolella olevat termit aloittaen viimeisestä johtavasta muuttujasta ja käyttäen vastaavaa yhtälöä tukiyhtälönä. Muokkaamisen tavoitteena on pelkistetty porrasmuoto.

ESIMERKKI 2

Ratkaistaan Gaussin-Jordanin eliminointimenetelmällä yhtälö-

$$\text{ryhmä } \begin{cases} 2x + 4y + z = 3 \\ 4x + 5y - 2z = 0 \\ 3x + y - z = 7. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 3 \\ 4x + 5y - 2z = 0 \\ 3x + y - z = 7 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot (-2) \cdot 3 \\ \cdot 1 \\ \cdot (-2) \end{array}$$

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 3 \\ -3y - 4z = -6 \\ 10y + 5z = -5 \end{cases} \begin{array}{l} \\ \cdot 10 \\ \cdot 3 \end{array}$$

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 3 \\ -3y - 4z = -6 \\ -25z = -75 \end{cases} \begin{array}{l} \\ \\ \cdot (-\frac{1}{25}) \end{array}$$

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 3 \\ -3y - 4z = -6 \\ z = 3 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot 1 \\ \cdot (-1) \end{array}$$

$$\begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ -3y = 6 \\ z = 3 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \cdot 4 \\ \end{array}$$

$$\begin{cases} 6x = 24 \\ -3y = 6 \\ z = 3 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot \frac{1}{6} \\ \cdot (-\frac{1}{3}) \\ \end{array}$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Vastaus: $x = 4$, $y = -2$, $z = 3$

Matriisimerkinnän käyttö

Yhtälöryhmän alkeismuunnoksissa käsitellään vain yhtälöiden kertoimia ja vakiotermejä, mistä syystä ratkaisu esitetään usein *laajennetun kerroinmatriisin* avulla. Tällä tarkoitetaan matriisia

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right),$$

jossa pystyviivan vasemmalla puolella ovat tuntemattomien kertoimet ja oikealla puolella vakiotermit. Ratkaisun esittämisessä voidaan käyttää seuraavia merkintöjä:

- $M_i(c)$ kertoo yhtälön i vakiolla $c \neq 0$
- P_{ij} vaihtaa yhtälöt i ja j keskenään
- $A_{ij}(c)$ lisää vakiolla c kerrotun yhtälön i yhtälöön j

Havainnollistetaan tätä menettelyä ratkaisemalla esimerkin 2 yhtälöryhmä matriisimerkintöjä käyttäen.

ESIMERKKI 3

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{A_{12}(-2), M_3(-2), A_{13}(3)} \\
& \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -4 & -6 \\ 0 & 10 & 5 & -5 \end{array} \right) \xrightarrow{M_3(3), A_{23}(10)} \\
& \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -25 & -75 \end{array} \right) \xrightarrow{M_3(-\frac{1}{25})} \\
& \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{A_{32}(4), A_{31}(-1)} \\
& \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{M_1(3), A_{21}(4)} \\
& \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{M_1(\frac{1}{6}), M_2(-\frac{1}{3})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Vastaus: $x = 4$, $y = -2$, $z = 3$

Gaussin-Jordanin eliminointimenetelmä johtaa siihen, että laajennettu kerroinmatriisi on lopulta muotoa

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & 1 & \dots & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & * \end{array} \right) \quad \text{tai} \quad \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & * & * \end{array} \right) \quad (* \in \mathbb{R})$$

riippuen siitä, onko yhtälöiden lukumäärä m suurempi, yhtä suuri vai pienempi kuin tuntemattomien lukumäärä n . Jokin rivi voi puuttua ja pystyviivan vasemmalla puolella voi olla nollarivejä useita, yksi tai ei yhtään. On päädytty johonkin seuraavista tilanteista:

1. Yhtälöryhmä on muokkautunut muotoon $x_1 = d_1$, $x_2 = d_2$, ..., $x_n = d_n$, jolloin sillä on tämä yksikäsitteinen ratkaisu.
2. Jokin yhtälöistä on muotoa $0 = b$, $b \neq 0$, jolloin yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.
3. Esiintyy kohdista 1 ja 2 poikkeava tilanne, jolloin yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua.

Jos $m \geq n$, mikä tahansa tapauksista 1, 2 tai 3 voi esiintyä.

Jos $m < n$, vain tapaukset 2 ja 3 voivat esiintyä.

Jos lineaarinen yhtälöryhmä on *homogeeninen*, toisin sanoen muotoa

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

niin sillä on aina ratkaisuna ns. *triviaaliratkaisu* $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Tapaus 2 ei siis voi esiintyä, joten mikäli muita ratkaisuja on, niitä on äärettömän monta.

ESIMERKKI 4

Ratkaise lineaarinen yhtälöryhmä, kun sen laajennettu kerroinmatriisi on seuraava:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) & \text{b)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & \text{c)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right) \\ \text{d)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) & \text{e)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & \text{f)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 7 \end{array} \right) \end{array}$$

Ratkaisu:

- a) Alin rivi merkitsee, että $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 2$. Tämä yhtälö on identtisesti epätosi, joten yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.
- b) Alin rivi merkitsee, että $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 0$. Tämä yhtälö on identtisesti tosi ja z voidaan valita mielivaltaisesti. Ratkaisu on $x = 5$, $y = -2$, $z \in \mathbb{R}$.
- c) Alin kerroinrivi antaa $z = 3$. Kun se sijoitetaan keskimmäiseen yhtälöön, saadaan $y + 3 \cdot 3 = 7$, josta $y = -2$. Sijoittamalla saadut arvot ylimpään yhtälöön ratkeaa $x = 11$. Ratkaisu on siis $x = 11$, $y = -2$, $z = 3$.
- d) Alin rivi vastaa yhtälöä $z + 2u = 1$, josta $z = 1 - 2u$. Keskimäinen rivi antaa suoraan $y = 2$. Ylimmästä saadaan takaisinsijoittamalla $x + (1 - 2u) = 3$, josta $x = 2 + 2u$. Ratkaisu on $x = 2 + 2u$, $y = 2$, $z = 1 - 2u$, $u \in \mathbb{R}$.
- e) Nollarivi merkitsee identtistä yhtälöä. Ratkaisu $x = 0$, $y = -2$, $z = -1$ nähdään suoraan.
- f) Yhtälöryhmässä on kaksi yhtälöä ja neljä tuntematonta. Tuntemattomista kaksi voidaan valita mielivaltaisesti. Ratkaisu on $x = 5 - 2z - 3u$, $y = 7 + 3z - u$, $z \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$.

T E H T Ä V I Ä

Ratkaise tehtävien 79–81 yhtälöryhmät Gaussin-Jordanin eliminointimenetelmällä.

$$79. \text{ a) } \begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + y + 3z = 4 \\ 3y + 2z = -8 \\ 4z = 8 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + 7y - z = 10 \\ -x + y - 2z = 11 \\ 3x + 2y + z = 2 \end{cases}$$

$$80. \text{ a) } \begin{cases} x - 2y = 5 \\ 3x + 5y = 4 \\ -2x - 7y = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x + y - 3z = 3 \\ x + 3y - 5z = 1 \\ 6x - 2y + z = 9 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 2x + 3y - z = -1 \end{cases}$$

$$81. \text{ a) } \begin{cases} 2y + 3z = 5 \\ x - 3y + 2z = -12 \\ 3x + z = 5 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + y - z - u = 6 \\ y + z - u = 2 \\ -x - y + 2z + 2u = -9 \\ 2z + u = -4 \end{cases}$$

Tehtävissä 82–84 on annettu lineaarisen yhtälöryhmän laajennettu kerroinmatriisi. Ratkaise kyseinen yhtälöryhmä Gaussin-Jordanin eliminointimenetelmällä. Käytä matriisimerkintää.

$$82. \text{ a) } \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \end{array} \right) \quad \text{b) } \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad \text{c) } \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{array} \right)$$

$$83. \text{ a) } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \quad \text{b) } \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \quad \text{c) } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

$$84. \text{ a) } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array} \right) \quad \text{b) } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \quad \text{c) } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

85. Jos matriisin $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ käänteismatriisi on $\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}$, niin

$$\begin{cases} ax + bu = 1 \\ cx + du = 0 \end{cases} \text{ ja } \begin{cases} ay + bv = 0 \\ cy + dv = 1. \end{cases} \quad (\text{Katso s. 21.}) \text{ Koska kummallakin}$$

yhtälöparilla on samat kertoimet, kaikki neljä yhtälöä voidaan

ilmaista yhtenä laajennettuna kerroinmatriisina $\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array} \right)$.

Tämän pelkistetystä porrasmuodosta $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & x & y \\ 0 & 1 & u & v \end{array} \right)$ nähdään

yhtälöparien ratkaisut x, u, y ja v ja samalla suoraan käänteis-

matriisi $\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}$. Tässä käänteismatriisin määrittystavassa on käytetty

Gaussin-Jordanin menetelmää.

Määritä Gaussin-Jordanin menetelmällä käänteismatriisi seuraaville matriiseille:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

86. Tutki Gaussin-Jordanin menetelmällä, onko matriisilla käänteismatriisi.

a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

87. Ratkaise homogeeninen yhtälöryhmä.

a) $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -2x + y = 0 \\ 6x - 3y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ 3x + 2y = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$

88. Ratkaise homogeeninen yhtälöryhmä.

a) $\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$

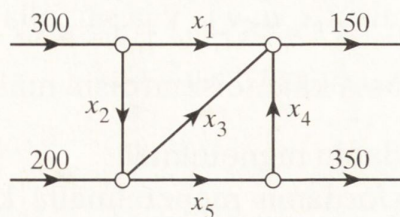
c) $\begin{cases} x - 2y - z - u = 0 \\ x + 3y + 2z + u = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3x + 4y + 3z + u = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - 2y - z - u = 0 \\ x + 3y + 2z + u = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 3x + 4y + 3z + 2u = 0 \end{cases}$

- *89. Millä vakioiden a ja b arvoilla yhtälöryhmällä
$$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ x + 2y + 4z = 3 \\ x + 3y + az = b \end{cases}$$

a) ei ole ratkaisuja, **b)** on äärettömän monta ratkaisua, **c)** on vain yksi ratkaisu?

- *90. Oheinen kuva esittää liikennevirtoja (autoa tunnissa) eräässä tieverkossa. Muodosta liikennettä kuvaava yhtälöryhmä tuntemattomina $x_1, x_2, \dots, x_5$ ja tutki sen ratkaisua.



Lineaariavaruus

1 Lineaariavaruuden määritelmä

Vektoreille joukossa $\mathbb{R}^2$ ja samoin joukossa $\mathbb{R}^3$ on määritelty yhteenlasku ja skalaarilla kertominen. Jos esimerkiksi $\bar{a} = 2\bar{i} - 3\bar{j}$ ja $\bar{b} = -\bar{i} + 5\bar{j}$, niin $\bar{a} + \bar{b} = (2 - 1)\bar{i} + (-3 + 5)\bar{j} = \bar{i} + 2\bar{j}$ ja

$4\bar{a} = 4(2\bar{i} - 3\bar{j}) = 8\bar{i} - 12\bar{j}$. Nämä laskutoimitukset noudattavat tiettyjä algebran sääntöjä, joten voidaan puhua vektoreiden muodostamasta *algebrallisesta systeemistä*.

Tällaisia systeemejä esiintyy muissakin yhteyksissä. Edellä on nähty (ks. s. 9–10), että myös matriiseille voidaan määritellä yhteenlasku ja skaalaarilla kertominen. Samoin ne voidaan määritellä myös reaalfunktioille. Jos esimerkiksi $f(x) = x^2$ ja $g(x) = 2x - 1$, niin funktion $f + g$ lauseke on $x^2 + 2x - 1$ ja funktion $5f$ lauseke $5x^2$.

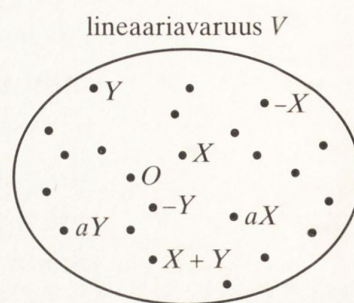
Matematiikassa halutaan käsitellä yhdellä kertaa kaikkien samantyyppisten järjestelmien teoriaa. Näille sovitaan ensin yhteinen nimi, tässä tapauksessa *lineaariavaruus*, ja täsmällinen määritelmä, joka ei riipu yksittäisen systeemin alkioista. Lineaariavaruudelle asetetaan seuraava *aksiomaattinen* määritelmä luettelemalla sen perusominaisuudet.

Joukkoa V , joka ei ole tyhjä, sanotaan *lineaariavaruudeksi*, jos siinä on määritelty alkioden summa $X + Y$ ja skalaarikertoaminen tulo aX ja jos seuraavat laskusäännöt ovat voimassa kaikille $X, Y, Z \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$:

1. $X + Y = Y + X$ (Vaihdantalaki)
2. $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$ (Liitäntälaki)
3. On olemassa *nolla-alkio* $O \in V$ niin, että $X + O = X$.
4. On olemassa *X:n vasta-alkio* $-X \in V$ niin, että $X + (-X) = O$.
5. $a(X + Y) = aX + aY$ (Osittelulaki)
6. $(a + b)X = aX + bX$ (Osittelulaki)
7. $a(bX) = (ab)X$
8. $1X = X$

Lineaariavaruutta kutsutaan usein myös *vektoriavaruudeksi* ja sen alkioita *vektoreiksi*. Erityisesti O on *nollavektori* ja $-X$ on X :n *vastavektori*. Se, että summa $X + Y$ ja tulo aX on määritelty joukossa V , tarkoittaa, että $X + Y$ ja aX ovat V :n alkioita ja lisäksi *yksikäsitteisiä*. Huomaa, että määritelmän neljä ensimmäistä kohtaa koskevat yksinomaan yhteenlaskua ja kaksi viimeistä skalaarilla kertomista. Kohdat 5. ja 6. puolestaan takaavat yhteenlaskujen ja skalaarilla kertomisen yhteensopivuuden.

Viereinen kuva havainnollistaa lineaariavaruuden rakennetta. Luku a on mikä tahansa reaaliluku. Kiinnitä huomio erityisesti siihen, että kun X ja Y ovat V :n alkioita, niin silloin myös aX ja $X + Y$ ovat V :n alkioita. Erikoistapauksessa X ja Y voivat tarkoittaa samaa alkioita. Lineaariavaruudessa on nolla-alkio O , joka on yhteenlaskun neutraali-alkio. Jokaisella V :n alkioilla X on tässä avaruudessa myös vasta-alkio $-X$ niin, että $X + (-X) = O$.



Liitântälain perusteella kolmen vektorin summa voidaan kirjoittaa muodossa $X + Y + Z$. Vastaava pätee useammankin vektorin summaan. Yleisemmin lauseke

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n \quad (a_i \in \mathbb{R}, X_i \in V)$$

merkitsee erästä yksikäsitteistä avaruuden V vektoria. Tätä vektoria sanotaan vektoreiden $X_1, X_2, \dots, X_n$ *lineaarikombinaatioksi* ja lukuja $a_1, a_2, \dots, a_n$ kyseisen vektorin *kertoimiksi*.

ESIMERKKI 1

a) Reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ on lineaariavaruus, sillä reaalilukujen ominaisuuksien perusteella summaa ja tuloa koskevat aksioomat 1–8 toteutuvat. Lineaariavaruuden $\mathbb{R}$ geometrisena vastineena on suora.

b) Joukko $\mathbb{R}^2$ on lineaariavaruus, kun vektoreiden yhteenlasku ja skalaarilla kertominen määritellään yhtälöillä

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+u \\ y+v \end{pmatrix} \text{ ja } a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix}. \text{ Nollavektorina on } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ja}$$

vektorin $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vastavektorina $\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$. Totea, että vaihdanta- ja

liitântälait samoin kuin aksioomat 1–8 toteutuvat. Lineaariavaruuden $\mathbb{R}^2$ geometrisena vastineena on taso.

- c) Joukko $\mathbb{R}^3$ on lineaariavaruus, kun vektoreiden yhteenlasku ja skalaarilla kertominen määritellään tavanomaisesti kuten äskeisessä kohdassa. Lineaariavaruuden $\mathbb{R}^3$ geometrisena vastineena on kolmiulotteinen avaruus.
- d) Yleisesti joukko $\mathbb{R}^n$ on lineaariavaruus, kun yhteenlasku ja kertolasku määritellään tavanomaisesti ja n on kokonaisluku ≥ 1 . Tällä lineaariavaruudella ei ole mitään geometrista vastinetta, kun $n \geq 4$.
- e) Kaikkien $m \times n$ -matriisien joukosta käytetään merkintää $\mathbb{R}^{m \times n}$. Tämä joukko voidaan myös osoittaa lineaariavaruudeksi, kun sovelletaan matriiseille määriteltyjä laskutoimituksia.

ESIMERKKI 2

Olkoon $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\}$, jolloin V esittää origon kautta kulkevaa suoraa. Osoitetaan, että V on lineaariavaruus, kun yhteenlasku ja skalaarilla kertominen määritellään yhtälöillä $(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$ ja $a(x, y) = (ax, ay)$.

Summa $(x, 2x) + (u, 2u) = (x + u, 2x + 2u) = (x + u, 2(x + u))$ on V :n alkio. Tulo $a(x, 2x) = (ax, 2ax)$ on myös V :n alkio. Tutkitaan laskusääntöjen 1–8 voimassaolo.

1. $(x, 2x) + (u, 2u) = (x + u, 2x + 2u) = (u + x, 2u + 2x) = (u, 2u) + (x, 2x)$
2. $((x, 2x) + (u, 2u)) + (t, 2t) = (x + u, 2x + 2u) + (t, 2t)$
 $= (x + u + t, 2x + 2u + 2t)$
 $= (x + (u + t), 2x + (2u + 2t))$
 $= (x, 2x) + ((u + t), (2u + 2t))$
 $= (x, 2x) + ((u, 2u) + (t, 2t))$
3. Nolla-alkio on $(0, 0)$, ja se on V :n alkio.
4. Alkion $(x, 2x)$ vasta-alkio on $(-x, -2x)$, ja se on V :n alkio.
5. $a((x, 2x) + (u, 2u)) = a(x + u, 2x + 2u)$
 $= (ax + au, 2ax + 2au)$
 $= (ax, 2ax) + (au, 2au)$
 $= a(x, 2x) + a(u, 2u), a \in \mathbb{R}$
6. $(a + b)(x, 2x) = ((a + b)x, (a + b) \cdot 2x)$
 $= (ax + bx, 2ax + 2bx)$
 $= (ax, 2ax) + (bx, 2bx)$
 $= a(x, 2x) + b(x, 2x), a, b \in \mathbb{R}$
7. $a(b(x, 2x)) = a(bx, 2bx) = (abx, 2abx) = ab(x, 2x)$
8. $1(x, 2x) = (1x, 1 \cdot 2x) = (x, 2x)$

Koska lineaariavaruuden määritelmän kaikki ehdot toteutuvat, V on lineaariavaruus.

ESIMERKKI 3

Esitä vektori $X = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ vektoreiden $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ ja $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

linearikombinaationa.

Ratkaisu:

Kysytty lineaarikombinaatio on $\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Sitä vastaa yhtälöryhmä
$$\begin{cases} 2a + b = 4 \\ 2b = -4 \\ 3a + 3b = 3. \end{cases}$$

Ratkaisu on $a = 3$ ja $b = -2$, joten kysytty esitysmuoto on $X = 3Y - 2Z$.

T E H T Ä V I Ä

91. Joukossa $V = \{0, 1, 2\}$ määritellään yhteenlasku ja luvulla kertominen tavanomaisesti. Selvitä, onko V lineaariavaruus.
92. Olkoon $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x + 1\}$. Osoita, että V ei ole lineaariavaruus. Yhteenlasku ja luvulla kertominen määritellään yhtälöillä $(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$ ja $a(x, y) = (ax, ay)$.
93. Olkoon $V = \{0\}$. Osoita, että V on lineaariavaruus, kun yhteenlasku ja luvulla kertominen määritellään tavanomaisesti.
94. Selvitä, miksi $\mathbb{R}^2$ ei ole lineaariavaruus, jos määritellään $(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$ ja $a(x, y) = (ay, ax)$. (Huomaa käännetty järjestys.)
95. Olkoon V niiden välillä $[0, 2]$ jatkuvien funktioiden joukko, joiden kuvaajat kulkevat pisteen $(1, 1)$ kautta. Osoita, että V ei ole lineaariavaruus. Yhteenlasku ja skalaarilla kertominen määritellään yhtälöillä $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ ja $(af)(x) = af(x)$.
96. Olkoon V kaikkien niiden polynomien joukko, joiden asteluku on enintään kaksi. Osoita, että V on lineaariavaruus, kun yhteenlasku ja skalaarilla kertominen määritellään tavanomaisesti.

97. Todista yksityiskohtaisesti, että $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ on lineaariavaruus.

98. Esitä vektori $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ vektoreiden **a)** $Y = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ja $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

b) $Y = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ja $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ lineaarikombinaationa.

2 Määritelmän seurauksia

Seuraavassa todistetaan joitakin tärkeimpiä lineaariavaruuden ominaisuuksia, jotka seuraavat tämän avaruuden määritelmästä. Perusteluissa esiintyy suorastaan itsestään selviltä tuntuvia laskusääntöjä, joten on tärkeää aina varmistaa, että todistaminen nojautuu vain määritelmässä esitettyihin aksioomeihin 1–8.

Lineaariavaruudessa on täsmälleen yksi nolla-alkio.

Olkoot O ja O' nolla-alkion vaatimukset täyttäviä alkioita. Koska nolla-alkion lisääminen ei muuta alkioita, niin $O + O' = O$. Samasta syystä $O + O' = O'$. Siis $O' = O$.

Lineaariavaruuden jokaisella alkiolla on täsmälleen yksi vasta-alkio.

Olkoot $-X$ ja X' alkion X vasta-alkioita, jolloin $X + (-X) = O$ ja $X + X' = O$. Liitântä- ja vaihdantalakeja käyttäen saadaan $X' = X' + O = X' + (X + (-X)) = (X' + X) + (-X) = O + (-X) = -X$. Siis $X' = -X$.

Koska vasta-alkio on yksikäsitteinen, voidaan määritellä vektoreiden X ja Y erotus yhtälöllä

$$X - Y = X + (-Y)$$

Tämä määritelmä tekee mahdolliseksi vektoriyhtälöiden ratkaisemisen:

Lineaariavaruuden yhtälöllä $X + Y = Z$ on täsmälleen yksi ratkaisu, ja se on $Z - Y$.

Todistetaan lause osoittamalla ensin, että $Z - Y$ on ratkaisu. Liitäntä- ja vaihdantalakien nojalla

$$\begin{aligned}(Z - Y) + Y &= (Z + (-Y)) + Y \\ &= Z + ((-Y) + Y) \\ &= Z + (Y + (-Y)) \\ &= Z + O = Z,\end{aligned}$$

joten $Z - Y$ on ratkaisu.

Osoitetaan nyt, että muita ratkaisuja ei ole. Oletetaan, että W on yhtälön $X + Y = Z$ ratkaisu eli $W + Y = Z$. Silloin

$$\begin{aligned}W &= W + O \\ &= W + (Y + (-Y)) \\ &= (W + Y) + (-Y) \\ &= Z + (-Y) \\ &= Z - Y.\end{aligned}$$

Lause on näin todistettu. Kuten huomataan, yhtälö $X + Y = Z$ voidaan ratkaista totuttuun tapaan niin, että "termi" Y siirretään yhtäsuuruusmerkin yli ja samalla vaihdetaan sen merkki.

Lineaariavaruudessa pätevät myös seuraavan lauseen kuusi kohtaa.

Olkoon V lineaariavaruus. Kaikille $X, Y, Z \in V$ ja $a \in \mathbb{R}$ on voimassa:

- a) $0X = O$
- b) $aO = O$
- c) Jos $aX = O$, niin $a = 0$ tai $X = O$.
- d) $-(aX) = (-a)X = a(-X)$
- e) Jos $X + Z = Y + Z$, niin $X = Y$.
- f) Jos $aX = aY$ ja $a \neq 0$, niin $X = Y$.

Todistetaan kohdat a, c ja d, ja jätetään loput kohdat harjoitustehtäviksi.

- a) $0X = (0 + 0)X = 0X + 0X$, joten $0X = 0X - 0X = 0X + (-0X) = O$.
- c) Oletetaan, että $aX = O$. Jos $a = 0$, väite on todistettu. Olkoon $a \neq 0$. Silloin $X = 1X = (\frac{1}{a} \cdot a)X = \frac{1}{a}(aX) = \frac{1}{a}O$, ja b-kohdan mukaisesti $\frac{1}{a}O = O$.

- d) $(-a)X + aX = (-a + a)X = 0X = O$, joten $(-a)X = -(aX)$. $aX + a(-X) = a(X + (-X)) = aO = O$, joten $a(-X) = -(aX)$. Lauseen d-kohta on näin todistettu ja sen mukaan erityisesti $(-1)X = -X$. Vektori $-(aX)$ voidaan merkitä myös ilman sulkeita muodossa $-aX$.

ESIMERKKI

Ratkaise X lineaariavaruuden yhtälöstä

$$Y + 3(Z - Y) - (Y - 2X) = Y - Z.$$

Ratkaisu:

Ratkaistaan ensin $-(Y - 2X)$, poistetaan sulkuumerkit ja sievennetään oikeaa puolta. Ratkaistaan sitten $-2X$ ja lopuksi X .

$$\begin{aligned} Y + 3(Z - Y) - (Y - 2X) &= Y - Z \\ -(Y - 2X) &= Y - Z - Y - 3(Z - Y) \\ -Y + 2X &= Y - Z - Y - 3Z + 3Y \\ -Y + 2X &= 3Y - 4Z \\ 2X &= 4Y - 4Z \\ X &= 2Y - 2Z \end{aligned}$$

Vastaus: $X = 2Y - 2Z$

T E H T Ä V I Ä

99. Todista, että $aO = O$ kaikilla $a \in \mathbb{R}$.

(Vihje: $aO = a(O + O) = aO + aO$, josta ratkaisemalla $aO = \dots$)

100. Todista, että jos $a = 0$ tai $X = O$, niin $aX = O$.

101. Todista, että jos $X + Z = Y + Z$, niin $X = Y$ kaikilla $X, Y, Z \in V$.

102. Todista, että jos $aX = aY$, niin $X = Y$ kaikilla $X, Y \in V$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

103. Todista, että $(-a)(-X) = aX$ kaikilla $a \in \mathbb{R}$ ja $X \in V$.
(Vihje: $(-a)(-X) = (-a)((-1)X)$. Sovella aksioomaa 7.)

104. Ratkaise X lineaariavaruuden yhtälöstä
 $2(Z + Y) + Z - (Y + 2X) = 3Y$.

3 Aliavaruus

On mahdollista, että lineaariavaruuden osajoukko on itsekin lineaariavaruus. Esimerkiksi $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{R}^2$ ovat lineaariavaruuksia, joista edellistä esittää suora ja jälkimmäistä taso. Toisaalta $\mathbb{R}$ on $\mathbb{R}^2$:n osajoukko, ja koska $\mathbb{R}$ on lineaariavaruus, sitä voidaan sanoa $\mathbb{R}^2$:n aliavaruudeksi.

Lineaariavaruuden V osajoukkoa, joka itsekin on lineaariavaruus, sanotaan V :n aliavaruudeksi.

Koska aliavaruus U on lineaariavaruus, se sisältää välttämättä alkioidensa summat ja skalaarilla kerrotut alkionsa. Toisin sanoen

$$(A) \quad \text{jos } X, Y \in U, \text{ niin } X + Y \in U,$$

$$(B) \quad \text{jos } a \in \mathbb{R} \text{ ja } X \in U, \text{ niin } aX \in U.$$

Sanotaan, että U on *suljettu* yhteenlaskun ja skalaarilla kertomisen suhteen. Toisaalta ehtojen (A) ja (B) voimassaolo takaa sen, että lineaariavaruuden osajoukko on aliavaruus. Nimittäin on voimassa lause

Lineaariavaruuden V ei-tyhjä osajoukko U on aliavaruus, jos se täyttää ehdot (A) ja (B).

Todistetaan lause. Valitaan ensin ehdossa (B) $a = 0$, jolloin nähdään, että $O \in U$. Valitsemalla sitten $a = -1$ nähdään, että jos $X \in U$, niin $-X \in U$. Yhtälöt $X + O = X$ ja $X + (-X) = O$ pätevät U :ssa, koska ne pätevät koko avaruudessa V . Samoin pätevät kaikki muut lineaariavaruuden määritelmässä olevat yhtälöt.

Lineaariavaruudella on aina niin sanotut *triviaalit* aliavaruudet $\{O\}$ ja se itse. Muita aliavaruuksia sanotaan *aidoiksi* aliavaruuksiksi. Mikä tahansa lineaariavaruuden osajoukko ei ole aliavaruus.

Lineaariavaruuden V aliavaruuksia voidaan helposti muodostaa niin, että valitaan jotkin V :n vektorit $X_1, X_2, \dots, X_n$ ja muodostetaan kaikki niiden lineaarikombinaatiot. Toisin sanoen muodostetaan joukko

$$\{a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n \mid a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}.$$

Tätä aliavaruutta sanotaan vektoreiden $X_1, X_2, \dots, X_n$ *virittämäksi* avaruudeksi. Sen todistaminen, että kysymyksessä on todella aliavaruus, jätetään harjoitustehtäväksi.

ESIMERKKI

Olkoon $V = \mathbb{R}^2$ ja $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$. Tutkitaan, onko U avaruuden V aliavaruus.

Jos $X = (x_1, y_1) \in U$ ja $Y = (x_2, y_2) \in U$, niin $y_1 \geq 0$ ja $y_2 \geq 0$, joten $y_1 + y_2 \geq 0$. Tästä syystä summa

$X + Y = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in U$, joten ehto (A) toteutuu.

Jos $a \in \mathbb{R}$ ja $X = (x, y) \in U$, niin $aX = (ax, ay)$. Tämä tulo ei kuitenkaan ole U :n alkio, mikäli $a < 0$, joten ehto (B) ei toteudu. Tästä syystä U ei ole V :n aliavaruus.

T E H T Ä V I Ä

- 105.** Olkoon $V = \mathbb{R}^2$. Tutki, onko U avaruuden V aliavaruus, kun
a) $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 5x\}$, **b)** $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 5x - 1\}$.
- 106.** Olkoon $V = \mathbb{R}^3$. Tutki, onko $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x + y - 1 = 0\}$ avaruuden V aliavaruus. Mitä joukko U merkitsee geometrisesti?
- 107.** Olkoon $V = \mathbb{R}^{2 \times 2} = \{2 \times 2\text{-matriisit } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\}$. Tutki, onko joukko U avaruuden V aliavaruus, kun $U = \{A \in V \mid b = -c\}$.
- 108.** Onko joukko
a) $U = \{(x, y, z, u) \mid x + y = 2\}$, **b)** $U = \{(x, y, z, u) \mid u = x + y + z\}$ avaruuden $V = \mathbb{R}^4$ aliavaruus?
- 109.** Olkoot $X_1, X_2, \dots, X_n$ lineaariavaruuden V alkioita. Osoita, että lineaarikombinaatioiden joukko
 $\{a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n \mid a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$
on V :n aliavaruus.

4 Lineaarinen riippuvuus

Olkoot vektorit $X_1, X_2, \dots, X_k$ lineaariavaruuden alkioita. Jos yhtälö

$$a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_kX_k = O$$

toteutuu joillakin reaalityyppisillä $a_1, a_2, \dots, a_k$, joista ainakin yksi eroaa nolasta, sanotaan, että vektorit $X_1, X_2, \dots, X_k$ ovat *lineaarisesti riippuvia*. Muussa tapauksessa näitä vektoreita sanotaan *lineaarisesti riippumattomiksi*. Käytetään myös sanontaa, että joukko $\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ on lineaarisesti riippuva (riippumaton), jos vektorit $X_1, X_2, \dots, X_k$ ovat lineaarisesti riippuvia (riippumattomia).

Joukko, jossa on vain nollavektori, on lineaarisesti riippuva. Tämä seuraa siitä, että $aO = O$ kaikilla $a \in \mathbb{R}$ (ks. tehtävä 99). Jokainen muu vain yhden vektorin joukko on lineaarisesti riippumaton. Tämä nähdään oikeaksi sivulla 52 olevan lauseen c-kohdan nojalla.

ESIMERKKI

Osoitetaan, että lineaariavaruuden $\mathbb{R}^2$ vektorit $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ja

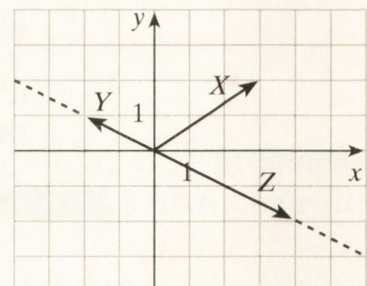
$Y = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ovat lineaarisesti riippumattomia.

Ehto $aX + bY = O$ saadaan muotoon

$\begin{pmatrix} 3a \\ 2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2b \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a - 2b \\ 2a + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, josta $\begin{cases} 3a - 2b = 0 \\ 2a + b = 0 \end{cases}$. Tämä yhtälöryhmä toteutuu vain, kun $a = b = 0$, joten vektorit X ja Y ovat lineaarisesti riippumattomia.

Vektorit $Y = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ja $Z = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ ovat sitä vastoin lineaarisesti riippuvia, koska yhtälöä $aY + bZ = O$ vastaava yhtälöryhmä $\begin{cases} -2a + 4b = 0 \\ a - 2b = 0 \end{cases}$ toteutuu aina, kun $a = 2b$ eli esimerkiksi arvoilla $a = 2$ ja $b = 1$.

Oheiseen koordinaatistoon on piirretty vektorit X, Y ja Z . Kiinnitä huomio siihen, että lineaarisesti riippumattomat vektorit X ja Y ovat erisuuntaiset. Sitä vastoin lineaarisesti riippuvat vektorit Y ja Z ovat yhdensuuntaiset eli sijaitsevat samalla suoralla.



Lineaarista riippuvuutta voidaan tutkia muodostamalla esimerkin tapaan lineaarinen homogeeninen yhtälöryhmä. Jos tällä yhtälöryhmällä on vain triviaaliratkaisu $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$ (ks. s. 54), vektorit ovat lineaarisesti riippumattomia. Lineaarisen riippuvuuden selvittämisessä voidaan myös käyttää seuraavaa lausetta:

Lineaariavaruuden äärellinen vektorijoukko on lineaarisesti riippuva tarkalleen silloin, kun joukon jokin vektori on muiden lineaarikombinaatio.

Todistetaan lause olettaen ensin, että joukko $\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ on lineaarisesti riippuva. Silloin se toteuttaa yhtälön

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_k X_k = O, \text{ jossa ainakin yksi kerroin eroaa nol-}$$

$$\text{lasta. Jos tämä kerroin on } a_1, \text{ niin } X_1 = -\frac{a_2}{a_1} X_2 - \dots - \frac{a_k}{a_1} X_k.$$

Yleisesti jos $a_i \neq 0$, niin vastaavalla tavalla X_i on muiden vektoreiden lineaarikombinaatio.

Kääntäen, jos $X_1 = b_2 X_2 + \dots + b_k X_k$, niin

$X_1 - b_2 X_2 - \dots - b_k X_k = O$. Tässä yhtälössä ainakin X_1 :n kerroin eroaa nolasta, joten vektorit $X_1, X_2, \dots, X_k$ ovat lineaarisesti riippuvia. Sama päättely käy, jos X_1 :n tilalla on jokin muu joukon $\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ vektori. Näin on lause todistettu.

Lauseesta seuraa, että jokainen sellainen vektorijoukko, jossa on mukana nollavektori, on lineaarisesti riippuva, sillä nollavektori voidaan aina esittää muiden vektoreiden lineaarikombinaationa valitsemalla kertoimet nolliksi. Kahden vektorin joukko $\{X_1, X_2\}$ on puolestaan lineaarisesti riippuva tarkalleen silloin, kun toinen vektori saadaan kertomalla toinen skalaarilla. Avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektorit ovat tällöin yhdensuuntaisia. Kolme avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektoria ovat lineaarisesti riippuvia tarkalleen silloin, kun ne ovat samassa tasossa. Tällöin ne voivat olla myös samalla suoralla.

T E H T Ä V I Ä

110. Osoita, että vektorit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ovat lineaarisesti riippumattomia.

111. Osoita, että vektorit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ovat lineaarisesti riippumattomia.

Selvitä, ovatko tehtävissä 112–114 annetut vektorit lineaarisesti riippumattomia.

112. a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

113. a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

114. a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

115. Selvitä, ovatko annetut matriisit lineaarisesti riippumattomia.

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

116. Vektorit X ja Y ovat lineaarisesti riippumattomia. Ovatko vektorit a) $X + Y$ ja $X - Y$, b) X , $X + Y$ ja $X - Y$, c) $X + 2Y$ ja $2X - Y$ lineaarisesti riippumattomia?

117. Todista, että jos joukon T osajoukko S on lineaarisesti riippuva, niin myös joukko T on lineaarisesti riippuva.

118. Todista, että jos joukko S on lineaarisesti riippumaton, niin myös sen osajoukko R on lineaarisesti riippumaton. (Vihje: Käytä epäsuoraa todistustapaa ja edellisen tehtävän lausetta.)

5 Kanta ja dimensio

Olkoot $X_1, X_2, \dots, X_n$ lineaariavaruuden V vektoreita. Avaruutta V sanotaan vektoreiden $X_1, X_2, \dots, X_n$ virittämäksi, jos jokainen V :n alkio voidaan esittää lineaarikombinaationa

$a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n$. Jos vektorit $X_1, X_2, \dots, X_n$ lisäksi ovat lineaarisesti riippumattomia, niitä sanotaan *kantavektoreiksi* ja niiden joukkoa *kannaksi*. Nolla-avaruuden $\{O\}$ kannaksi sovitaan tyhjä joukko. Kantaesityksessä $X = a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n$ kertoimia $a_1, a_2, \dots, a_n$ sanotaan vektorin X *koordinaateiksi* kyseisen kannan suhteen.

Kannan merkitys ilmenee seuraavasta lauseesta.

Jos joukko $B = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ on avaruuden V kanta, niin jokainen V :n vektori voidaan esittää yksikäsitteisesti vektoreiden $X_1, X_2, \dots, X_n$ lineaarikombinaationa.

Todistetaan lause. Jos $B = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ on avaruuden V kanta, niin B virittää V :n eli jokainen V :n vektori X voidaan esittää vektoreiden $X_1, X_2, \dots, X_n$ lineaarikombinaationa muodossa

$$X = a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n.$$

Jos X on myös muotoa

$$X = b_1X_1 + b_2X_2 + \dots + b_nX_n,$$

niin vähentämällä tämä yhtälö edellisestä saadaan

$$O = (a_1 - b_1)X_1 + (a_2 - b_2)X_2 + \dots + (a_n - b_n)X_n.$$

Koska vektorit $X_1, X_2, \dots, X_n$ ovat lineaarisesti riippumattomia, niin $a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$. Täten vektorin esitystapa on yksikäsitteinen.

Edellinen lause on on myös kääntäen voimassa.

Jos jokainen V :n vektori X voidaan esittää yksikäsitteisesti muodossa

$$X = a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n,$$

niin $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ on V :n kanta.

Tätä lausetta käyttäen voidaan usein mukavasti tutkia, onko annettu vektorijoukko kanta. Lauseen todistaminen jätetään harjoitustehtäväksi.

ESIMERKKI

- a) Osoitetaan, että vektorit $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ja $Y = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ muodostavat avaruuden $\mathbb{R}^2$ kannan. Sitä varten näytetään, että $\mathbb{R}^2$:n mielivaltainen vektori $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ voidaan esittää yksikäsitteisesti X :n ja Y :n lineaarikombinaationa. Se seuraa siitä, että ehdosta $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ saatavalla yhtälöparilla $\begin{cases} 3a - 2b = x \\ 2a + b = y \end{cases}$ on yksikäsitteinen ratkaisu $a = \frac{1}{7}(x + 2y)$, $b = \frac{1}{7}(-2x + 3y)$. Siis vektorit X ja Y muodostavat avaruuden $\mathbb{R}^2$ kannan.
- b) Vektorit $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ja $Z = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ eivät muodosta avaruuden $\mathbb{R}^2$ kantaa. Nimittäin $X = 2Y - Z$, joten vektorit X , Y ja Z ovat lineaarisesti riippuvia.

Olkoon avaruudella V kanta, joka muodostuu n :stä vektorista. Voidaan todistaa, että jokainen enemmän kuin n alkiota sisältävä joukko V :ssä on lineaarisesti riippuva. Tästä seuraa silloin, että avaruuden V kaikissa kannoissa on n vektoria. Lisäksi voidaan näyttää, että jokainen n :n vektorin joukko on kanta, jos nämä vektorit ovat lineaarisesti riippumattomia. Kannan vektoreiden lukumäärää n sanotaan V :n *dimensioksi* ja merkitään $\dim V = n$. Sanotaan myös, että lineaariavaruus V on n -ulotteinen. Kootaan vielä äskeiset lauseet:

Lineaariavaruuden kaikissa kannoissa on yhtä monta vektoria. Jos $\dim V = n$, niin n :n vektorin lineaarisesti riippumaton joukko on V :n kanta.

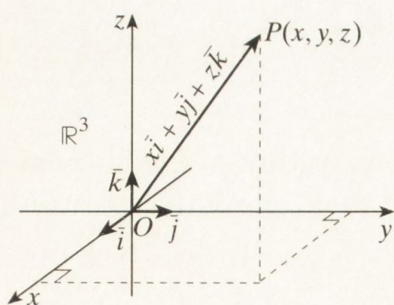
Edellisen esimerkin mukaan avaruudella $\mathbb{R}^2$ on kahden alkion kanta, joten $\dim \mathbb{R}^2 = 2$. Kaikissa muissakin $\mathbb{R}^2$:n kannoissa on silloin kaksi alkiota. Kantavektoreina käytetään tavallisesti ns. perusvektoreita, jotka muodostavat *luonnollisen kannan*. Esimerkiksi $\mathbb{R}^2$:n

luonnollinen kanta koostuu vektoreista $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eli

toisin merkiten vektoreista $\bar{i}$ ja $\bar{j}$. Vastaavasti $\mathbb{R}^3$:n luon-

nollisen kannan muodostavat vektorit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eli

vektorit $\bar{i}$, $\bar{j}$ ja $\bar{k}$. Vektorin $\overrightarrow{OP} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ koordinaatit luonnollisen kannan $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ suhteen ovat luvut x , y ja z .



T E H T Ä V I Ä

119. Edellisen esimerkin a-kohdassa osoitettiin sivulla 59 olevan lauseen nojalla, että vektorit $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ja $Y = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ muodostavat avaruuden $\mathbb{R}^2$ kannan. Osoita tämä nyt vetoamalla lauseeseen: Jos $\dim V = n$, niin $n:n$ vektorin lineaarisesti riippumaton joukko on $V:n$ kanta.

120. Onko $\{X, Y\}$ avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta, kun **a)** $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ja $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,
b) $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ja $Y = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$?

121. Muodostavatko annetut vektorit avaruuden $\mathbb{R}^3$ kannan?

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{b)} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \text{c)} \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} & \text{d)} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

122. Millä $t:n$ arvoilla vektorit $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ t \end{pmatrix}$ muodostavat avaruuden $\mathbb{R}^3$ kannan?

123. Olkoon $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ja $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Osoita, että $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ kanta.

***124.** Todista, että jos jokainen $V:n$ vektori X voidaan esittää yksikäsitteisesti muodossa $X = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n$, niin $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ on $V:n$ kanta.

Sisätuloavaruus

1 Sisätulo

Vektorilaskennassa esiintyy vektoreiden *skalaaritulo* eli *pistetulo*. Se on kahden vektorin välinen laskutoimitus ja määritellään yhtälöllä $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cos(\bar{a}, \bar{b})$, jossa esiintyvät vektoreiden pituudet ja

välinen kulma. Avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektoreille $\bar{a} = x_1 \bar{i} + x_2 \bar{j} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ja

$\bar{b} = y_1 \bar{i} + y_2 \bar{j} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ voidaan johtaa skalaaritulon laskukaava

$\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1 y_1 + x_2 y_2$ ja avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektoreille

$\bar{a} = x_1 \bar{i} + x_2 \bar{j} + x_3 \bar{k} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ja $\bar{b} = y_1 \bar{i} + y_2 \bar{j} + y_3 \bar{k} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ vastaavasti

kaava $\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$.

Skalaaritulo voidaan yleistää avaruuteen $\mathbb{R}^n$.

Jos $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ja $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ ovat avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreita, niiden

skalaaritulo on $x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$. Siitä käytetään usein merkintää $(X|Y)$ ja nimitystä *sisätulo*. Tämän nimityksen käyttö on perusteltua siksi, että sisätulo on käsitteenä laajempi kuin skalaaritulo, ja tavallinen skalaaritulo on vain yksi esimerkki sisätulosta. Yleisessä lineaariavaruudessa sisätulo määritellään seuraavasti:

Lineaariavaruuden V vektoreiden X ja Y *sisätulolla* $(X|Y)$ tarkoitetaan *reaalilukua*, jolla on seuraavat ominaisuudet:

1. Jos $X \neq O$, niin $(X|X) > 0$.
2. $(X|Y) = (Y|X)$
3. $(X + Y|Z) = (X|Z) + (Y|Z)$
4. $(aX|Y) = a(X|Y)$, $a \in \mathbb{R}$

Lineaariavaruutta V , jossa on määritelty sisätulo, sanotaan *sisätuloavaruudeksi*.

ESIMERKKI 1

Osoitetaan, että vektoreiden skalaaritulo on sisätulo.

Olkoot X, Y ja Z avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreita.

1. $(X|X) = x_1^2 + \dots + x_n^2 \geq 0$. Jos $X \neq O$, niin ainakin yksi $x_i \neq 0$, joten $(X|X) > 0$.
2. $(X|Y) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n = y_1x_1 + \dots + y_nx_n = (Y|X)$
3. $(X + Y|Z) = (x_1 + y_1)z_1 + \dots + (x_n + y_n)z_n$
 $= (x_1z_1 + \dots + x_nz_n) + (y_1z_1 + \dots + y_nz_n)$
 $= (X|Z) + (Y|Z)$
4. $(aX|Y) = ax_1y_1 + \dots + ax_ny_n = a(x_1y_1 + \dots + x_ny_n) = a(X|Y)$

Skalaaritulo täyttää kaikki sisätulon määritelmässä mainitut ehdot, joten se on sisätulo.

ESIMERKKI 2

Olkoon $V = \{\text{enintään toisen asteen polynomit}\}$.

Merkitään $P_1 = a_1x^2 + a_2x + a_3$ ja $P_2 = b_1x^2 + b_2x + b_3$.

Osoitetaan, että $(P_1|P_2) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ on V :n eräs sisätulo.

1. Jos P_1 ei ole nolla, niin $a_1 \neq 0$ tai $a_2 \neq 0$ tai $a_3 \neq 0$.
Tällöin $(P_1|P_1) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 > 0$.
2. $(P_1|P_2) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3 = (P_2|P_1)$
3. Merkitään $P_3 = c_1x^2 + c_2x + c_3$.
 $(P_1 + P_2|P_3) = (a_1 + b_1)c_1 + (a_2 + b_2)c_2 + (a_3 + b_3)c_3$
 $= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) + (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)$
 $= (P_1|P_3) + (P_2|P_3)$
4. $(aP_1|P_2) = aa_1b_1 + aa_2b_2 + aa_3b_3$
 $= a(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) = a(P_1|P_2)$

T E H T Ä V I Ä

125. Määritä sisätulo $(X|Y)$, kun

$$\text{a) } X = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ja } Y = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{b) } X = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ ja } Y = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

126. Määritä sisätulo $(X|Y)$, kun

$$\text{a) } X = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ ja } Y = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{b) } X = Y = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

127. Määritä vektoreiden X ja Y välinen kulma.

$$\text{a) } X = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{b) } X = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

128. Osoita, että reaalityökalujen kertolasku on sisätulo.

129. Olkoot X ja Y avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektoreita. Osoita, että yhtälö $(X|Y) = x_1y_1 + 2x_2y_2$ määrittelee erään sisätulon $\mathbb{R}^2$:ssa.

130. Olkoon $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ja $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$.

Osoita, että $(A|B) = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}$ on sisätulo lineaariavaruudessa $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

*131. Osoita, että seuraavat yhtälöt pätevät sisätuloavaruudessa kaikille sen alkiolle X, Y, Z :

$$\begin{aligned} \text{a) } (0|X) &= 0 & \text{b) } (X|Y+Z) &= (X|Y) + (X|Z) \\ \text{c) } (X|aY) &= a(X|Y), \quad a \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2 Normi

Monissa matemaattisissa tarkasteluissa tarvitaan jonkinlainen mita joukon alkioiden etäisyydelle. Näistä mitoista monet ovat jo tuttuja. Esimerkiksi lukujen x ja y etäisyys lukusuoralla on $|x - y|$, tason pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) etäisyys $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, ja avaruuden pisteiden (x_1, y_1, z_1) ja (x_2, y_2, z_2) etäisyys $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$. Sisätuloavaruudessa etäisyyden ilmaisemiseen käytetään *normin* käsitettä, joka määritellään seuraavasti.

Sisätuloavaruudessa vektorin X normi on $\|X\| = \sqrt{(X|X)}$.

Määritelmän mukaan vektorin $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ normi on $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, ja vek-

torin $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ normi $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. Lineaariavaruuksissa $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$

normi tarkoittaa siis samaa kuin vektorin *pituus*. Siksi normia sanotaan yleisessäkin lineaariavaruudessa joskus pituudeksi ja merkitään $|X|$:llä.

Normin avulla määritellään nyt vektoreiden X ja Y etäisyys.

Sisätuloavaruudessa vektoreiden X ja Y etäisyys on

$$d(X, Y) = \|X - Y\|.$$

Huomaa, että tämä määritelmä johtaa juuri alussa mainittuihin, avaruuksissa $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$ käytettäviin etäisyyslausekkeisiin.

Sisätuloavaruudessa on voimassa

$$\text{Cauchyn-Schwarzin epäyhtälö} \quad |(X|Y)| \leq \|X\| \cdot \|Y\|$$

$$\text{Kolmioepäyhtälö} \quad \|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$$

Todistetaan Cauchyn-Schwarzin epäyhtälö. Aluksi nähdään, että jos $X = O$, epäyhtälön molemmat puolet ovat yhtä suuria kuin nolla. Jos $X \neq O$, muodostetaan vektorin $aX + Y$ sisätulo itsensä kanssa ($a \in \mathbb{R}$).

$$\begin{aligned} (aX + Y|aX + Y) &= a^2(X|X) + a(X|Y) + a(Y|X) + (Y|Y) \\ &= (X|X)a^2 + 2(X|Y)a + (Y|Y) \end{aligned}$$

Koska tämä sisätulo ei ole negatiivinen, saadaan toisen asteen epäyhtälö

$$(X|X)a^2 + 2(X|Y)a + (Y|Y) \geq 0,$$

josta seuraa, että diskriminantti on ≤ 0 . Siis

$$4(X|Y)^2 - 4(X|X)(Y|Y) \leq 0 \text{ eli } (X|Y)^2 \leq (X|X)(Y|Y).$$

Ottamalla puolittain neliöjuuri saadaan Cauchyn-Schwarzin epäyhtälö.

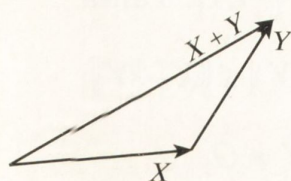
Käytetään nyt saatua tulosta kolmioepäyhtälön todistamisessa. Koska

$$(X + Y|X + Y) = (X|X) + 2(X|Y) + (Y|Y) \text{ ja}$$

$$(X|Y) \leq |(X|Y)| \leq \|X\| \cdot \|Y\|, \text{ niin}$$

$$\|X + Y\|^2 \leq \|X\|^2 + 2\|X\| \cdot \|Y\| + \|Y\|^2 = (\|X\| + \|Y\|)^2.$$

Ottamalla puolittain neliöjuuri saadaan kolmioepäyhtälö.



Kolmioepäyhtälön nimi johtuu tämän epäyhtälön geometrisesta merkityksestä 2- ja 3-ulotteisissa avaruuksissa. Jos kolmion kahtena sivuna ovat vektorit X ja Y oheisen kuvan mukaisesti, kolmantena sivuna on silloin vektori $X + Y$. Kolmioepäyhtälö sisältää nyt sen ajatuksen, että kolmion kahden sivun summa on vähintään kolmannen sivun suuruinen.

T E H T Ä V I Ä

132. Määritä annetun vektorin normi.

$$\text{a)} \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{c)} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

133. Määritä annetun vektorin normi.

$$\text{a)} (-3 \ -1)^T \quad \text{b)} (-2 \ 0 \ -1 \ 3)^T \quad \text{c)} (\sqrt{2} \ \sqrt{3} \ -2)^T$$

134. Millä a :n arvolla vektorin $(3 \ -1 \ 2 \ a)^T$ normi on 4?

135. Laske vektoreiden X ja Y välinen etäisyys, kun

$$X = (1 \ 4 \ -1 \ 2 \ 0 \ 7)^T \text{ ja } Y = (4 \ 2 \ 1 \ 6 \ -1 \ 8)^T.$$

3 Kohtisuoruus

Vektorilaskennassa kahden vektorin $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ välinen kulma $(\bar{a}, \bar{b})$ tarkoittaa koveraa kulmaa, jonka nämä vektorit muodostavat alkaessaan samasta pisteestä. Tämän kulman suuruus voidaan laskea skalaarituloa käyttäen yhtälöstä $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cos(\bar{a}, \bar{b})$. Yleisessä sisätuloavaruudessa käytetään vastaavasti sisätuloa ja asetetaan seuraava määritelmä.

Sisätuloavaruudessa kahden vektorin X ja Y välinen kulma

on se välin $[0, \pi]$ kulma α , jolle $\cos \alpha = \frac{(X|Y)}{\|X\| \cdot \|Y\|} \quad (X, Y \neq O).$

Kulma α voidaan tietenkin ilmaista myös asteina, joskin radiaani on yleisempi teoreettisissa tarkasteluissa. Asetettu määritelmä on yleistys vektorilaskennan käyttämästä määritelmästä ja mielekäs

siksi, että lauseke $\frac{(X|Y)}{\|X\| \cdot \|Y\|}$ on aina arvoltaan välillä $[-1, 1]$. Tämä

taas seuraa Cauchyn-Schwarzin epäyhtälöstä $|(X|Y)| \leq \|X\| \cdot \|Y\|$,

joka voidaan kirjoittaa muotoon $\frac{|(X|Y)|}{\|X\| \cdot \|Y\|} \leq 1$, kun $X, Y \neq O$.

Vektoreita X ja Y sanotaan *ortogonaalisiksi* eli *kohtisuoriksi* ja merkitään $X \perp Y$, jos $(X|Y) = 0$. Tällöin vektoreiden välinen kulma on 90° . Huomaa, että $O \perp X$ kaikille vektoreille X , sillä tehtävän 131 mukaan on aina $(O|X) = 0$.

Sisätuloavaruuden kohtisuoriin vektoreihin liittyy seuraava lause:

Olkoot X ja Y sisätuloavaruuden kohtisuoria vektoreita.

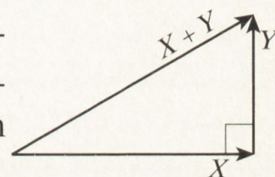
$$\text{Silloin } \|X + Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2.$$

Todistetaan lause. Normin määritelmän ja sisätulon ominaisuuksien nojalla

$$\begin{aligned} \|X + Y\|^2 &= (X + Y|X + Y) \\ &= (X|X) + (X|Y) + (Y|X) + (Y|Y) \\ &= (X|X) + 2(X|Y) + (Y|Y) \\ &= \|X\|^2 + 2(X|Y) + \|Y\|^2. \end{aligned}$$

Koska $X \perp Y$, niin $(X|Y) = 0$, joten $\|X + Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2$.

Lause tunnetaan *Pythagoraan lauseena*. Sitä käytetään usein avaruuksissa $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$, joissa vektorit X , Y ja $X + Y$ muodostavat suorakulmaisen kolmion, kun $X \perp Y$.



Sanotaan, että sisätuloavaruuden V osajoukko S on *ortogonaalinen*, jos sen jokainen vektori on kohtisuorassa kaikkia muita S :n vektoreita vastaan. Jos vielä S :n jokaisen vektorin normi on 1, joukkoa S sanotaan *ortonormaaliksi*.

ESIMERKKI 1

Avaruuden $\mathbb{R}^2$ luonnollinen kanta koostuu vektoreista

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ja } E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Niiden joukko on ortonormaali. (Totea!)}$$

Samoin on avaruuden $\mathbb{R}^3$ kantavektoreiden $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

ja $E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ joukko. Yleisesti pätee, että avaruuden $\mathbb{R}^n$ luonnolli-

nen kanta $\{E_1, \dots, E_n\}$ on ortonormaali joukko.

ESIMERKKI 2

Osoita, että joukko $\{A, B\}$ on ortonormaali, kun

$$A = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \text{ ja } B = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 0 \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Ratkaisu:

Vektorit A ja B ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, sillä

$$(A|B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{-1}{\sqrt{5}} + \frac{-2}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 0.$$

Vektorit A ja B ovat lisäksi yksikkövektoreita, sillä

$$\|A\| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = 1 \text{ ja } \|B\| = \sqrt{\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = 1.$$

Joukko $\{A, B\}$ on näin ollen ortonormaali.

Osoitetaan seuraavaksi, että

Sisätuloavaruuden ortonormaali joukko on lineaarisesti riippumaton.

Olkoon $S = \{X_1, \dots, X_k\}$ ortonormaali joukko. Kirjoitetaan yhtälö $a_1X_1 + \dots + a_kX_k = O$ ja muodostetaan kummankin puolen sisätulo joukon S mielivaltaisen vektorin X_i kanssa. Tuloksena on yhtälö

$$a_1(X_1|X_i) + \dots + a_i(X_i|X_i) + \dots + a_k(X_k|X_i) = (O|X_i).$$

Jokainen vasemman puolen termi on nolla paitsi i :s termi, joka on

$$a_i(X_i|X_i) = a_i\|X_i\|^2 = a_i \cdot 1 = a_i. \text{ Oikea puoli on nolla, joten } a_i = 0.$$

Koska a_i on mielivaltainen kerroin, niin kaikki yhtälön

$a_1X_1 + \dots + a_kX_k = O$ kertoimet ovat nollia. Se merkitsee, että vektorit $X_1, \dots, X_k$ ovat lineaarisesti riippumattomia.

Jos lineaariavaruuden kanta on ortonormaali, niin vektorin koordinaatit kannan suhteen on helppo laskea. Oletetaan, että

$\{X_1, \dots, X_k\}$ on ortonormaali kanta, ja mielivaltainen vektori Y halutaan esittää muodossa $Y = t_1X_1 + \dots + t_kX_k$. Koordinaatit $t_1, \dots, t_k$ löydetään nyt seuraavasti. Muodostetaan yhtälön $Y = t_1X_1 + \dots + t_kX_k$ kummankin puolen sisätulo vektorin X_i kanssa, jolloin saadaan kuten edellä $t_i = (Y|X_i)$. Siis

$$Y = (Y|X_1)X_1 + \dots + (Y|X_k)X_k.$$

Vektorin Y koordinaatit kannan suhteen ovat siis yksinkertaisesti luvut $(Y|X_i)$.

ESIMERKKI 3

Esitä avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektori $Y = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ käyttämällä

- a) kantaa $\{X_1, X_2\}$, kun $X_1 = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,8 \end{pmatrix}$ ja $X_2 = \begin{pmatrix} -0,8 \\ 0,6 \end{pmatrix}$,
 b) luonnollista kantaa (E_1, E_2) .

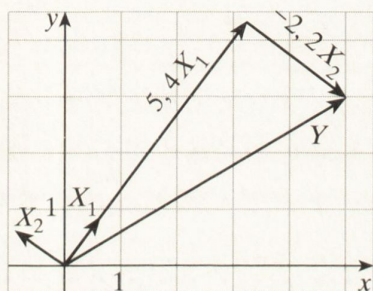
Ratkaisu:

- a) $(Y|X_1) = 5 \cdot 0,6 + 3 \cdot 0,8 = 5,4$ ja
 $(Y|X_2) = 5 \cdot (-0,8) + 3 \cdot 0,6 = -2,2$, joten $Y = 5,4X_1 - 2,2X_2$.

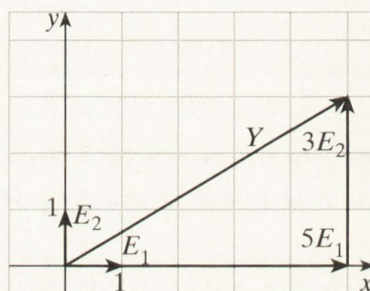
- b) $(Y|E_1) = 5 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 5$ ja $(Y|E_2) = 5 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3$, joten
 $Y = 5E_1 + 3E_2$. Tulos vastaa vektorilaskennan käyttämää
 esitystapaa $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 5\bar{i} + 3\bar{j}$.

Alla oleva kuva havainnollistaa vektorin Y esittämistä annettujen kantavektoreiden avulla.

a)



b)



T E H T Ä V I Ä

136. Laske vektoreiden $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ välinen kulma.

137. Laske vektoreiden X ja Y välinen kulma.

- a) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ja $Y = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix}$ ja $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

138. Laske vektoreiden X ja Y välinen kulma, kun

$$X = (1 \ 4 \ -1 \ 2 \ 0 \ 7)^T \text{ ja } Y = (4 \ 2 \ 1 \ 6 \ -1 \ 8)^T.$$

139. Millä a :n arvolla vektorit $(-2 \ 1 \ 5 \ -3)^T$ ja $(3 \ -1 \ 2 \ a)^T$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan?

140. Osoita, että joukko $\{A, B\}$ on ortogonaalinen, kun

$$A = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ ja } B = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

141. Osoita, että joukko $\{A, B\}$ on ortonormaali, kun

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ ja } B = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

142. Osoita, että joukko $\{E, F, G\}$ on ortogonaalinen, kun

$$E = (1 \ -1 \ 1)^T, \ F = (1 \ 2 \ 1)^T \text{ ja } G = (-1 \ 0 \ 1)^T.$$

143. Osoita, että $\{X_1, X_2, X_3\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^3$ ortonormaali

$$\text{kanta, kun } X_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ X_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ja } X_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

144. Esitä avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektori $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$ käyttämällä

a) edellisen tehtävän kantaa,

b) luonnollista kantaa (E_1, E_2, E_3) .

Tason lineaari- kuvaukset

1 Lineaarikuvaus

Funktio joukosta A joukkoon B tarkoittaa sääntöä, joka liittää jokaiseen A :n alkioon tarkalleen yhden alkion joukosta B . Jos tätä sääntöä edustaa kirjain f , merkitään lyhyesti $f: A \rightarrow B$. Funktion määritelmä ei edellytä mitään joukkojen A ja B alkioista. Ne ovat tavallisesti lukuja, mutta lineaarialgebrassa ne ovat vektoreita, ja tällöin käytetään funktio-sanan asemesta tavallisesti sen synonyymia *kuvaus*. Kahden lineaariavaruuden välinen kuvaus liittää siis jokaiseen toisen avaruuden vektoriin tarkalleen yhden vektorin toisesta avaruudesta. Tietyillä ehdoilla tämä kuvaus on nimeltään *lineaarikuvaus*.

Lineaariavaruuksien U ja V välistä kuvausta $T: U \rightarrow V$ sanotaan *lineaarikuvaukseksi*, jos kaikilla U :n vektoreilla X ja Y ja kaikilla reaaliluvuilla a on voimassa

1. $T(X + Y) = T(X) + T(Y)$ ja
2. $T(aX) = aT(X)$.

ESIMERKKI 1

Määritellään kuvaus $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ yhtälöllä **a)** $f(x) = 2x$,
b) $f(x) = 2x + 1$. Tutki, onko f lineaarikuvaus.

Ratkaisu:

- a)** 1. $f(x + y) = 2(x + y) = 2x + 2y = f(x) + f(y)$
2. $f(ax) = 2ax = a \cdot 2x = af(x)$

Koska f toteuttaa määritelmässä mainitut ehdot, se on lineaarikuvaus.

- b)** $f(x + y) = 2(x + y) + 1 = 2x + 2y + 1$.

Toisaalta $f(x) + f(y) = 2x + 1 + 2y + 1 = 2x + 2y + 2$.

Huomataan, että ainakaan ensimmäinen ehto ei toteudu, joten f ei ole lineaarikuvaus.

Jos lineaarikuvauksen määritelmän 2. kohdassa valitaan $a = 0$, saadaan tulos $T(O) = O$. Tämän perusteella olisi esimerkin 1 b-kohdassa voitu suoraan nähdä, että funktio $f(x) = 2x + 1$ ei ole lineaarikuvauks. Nimittäin lineaariavaruuden $\mathbb{R}$ nolla-alkio on 0 ja $f(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1 \neq 0$.

ESIMERKKI 2

Olkoon A tyyppiä $n \times n$ oleva matriisi. Määritellään kuvaus $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ yhtälöllä $T(X) = AX$. Matriisitulon ominaisuuksista seuraa, että T on lineaarikuvauks. Nimittäin $T(X + Y) = A(X + Y) = AX + AY = T(X) + T(Y)$ ja $T(aX) = A(aX) = a(AX) = aT(X)$.

Seuraavassa rajoitutaan tutkimaan vain tason lineaarikuvauksia eli kuvauksia $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Samalla sovitaan, että kun muuttujana on vektori, jossa itsessään on sulkuumerkit, muut sulkuumerkit voidaan jättää pois. Esimerkiksi $F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

T E H T Ä V I Ä

145. Määritellään kuvaus $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ yhtälöllä $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 3y \end{pmatrix}$. Tutki lineaarikuvauksen määritelmää käyttäen, onko T lineaarikuvauks.

146. Määritellään kuvaus $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ yhtälöllä $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y^2 \end{pmatrix}$. Tutki lineaarikuvauksen määritelmää käyttäen, onko T lineaarikuvauks.

147. Osoita, että kun T on lineaarikuvauks, niin $T(a_1X_1 + a_2X_2) = a_1T(X_1) + a_2T(X_2)$.

148. Kuvaus $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ täyttää ehdot $F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $F\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ja $F\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Selvitä, voiko F olla lineaarikuvauks.

2 Venytys

Venytys on kuvaus $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, jonka määrittelee yhtälö

$T(X) = aX$, $a \in \mathbb{R}$. Jos $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, niin

$$T(X) = T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = AX.$$

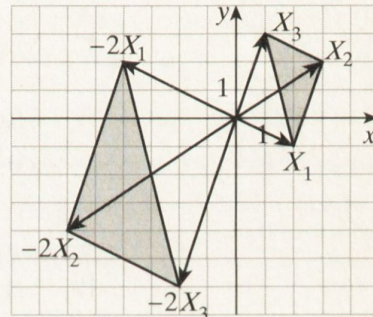
Kuvaus T voidaan siis lausua matriisin A ja kuvattavan vektorin X tulona, minkä vuoksi sanotaan, että kuvaus on *matriisin A välittämä kuvaus*. Esimerkin 2 mukaan (s. 72) kysymyksessä on lineaarikuvaus. Venytys on siis matriisin $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ välittämä lineaarikuvaus.

ESIMERKKI

Kolmion kärkipisteet ovat $(2, -1)$, $(3, 2)$ ja $(1, 3)$ ja niiden paikka-vektorit vastaavasti X_1 , X_2 ja X_3 . Havainnollista lineaarikuvauksista $T(X) = -2X$. Mikä matriisi välittää kyseisen kuvauksen?

Ratkaisu:

Vektori $-2X$ on kaksi kertaa niin pitkä kuin vektori X ja suunnaltaan tälle vastakkainen. Annetussa kuvauksessa vektoreiden pituudet tulevat kaksinkertaisiksi, joten niin tulevat myös kolmion kärkien etäisyydet origosta. Kaikki muutkin etäisyydet kaksinkertaistuvat. Kysymyksessä on *yhdenmuotoisuuskuvaus* mittakaavassa 2. Tuloksena saadun kolmion kärkipisteet ovat $(-4, 2)$, $(-6, -4)$ ja $(-2, -6)$.



Kuvauksen välittää matriisi $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Venytystä sanotaan myös *homoteettiseksi* kuvaukseksi eli *homotetiaksi*. Matriisin $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ välittämässä kuvauksessa *homotetiakeskus* on origo. Venytys on yhdenmuotoisuuskuvaus mittakaavassa $|a|$. Jos $|a| > 1$, tasokuvion koko kuvauksessa suurenee. Jos $0 < |a| < 1$, kuvion koko pienenee, jolloin puhutaan myös *kutistuksesta*.

T E H T Ä V I Ä

149. Mikä matriisi välittää lineaarikuvauksen T , kun $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ on

a) $\begin{pmatrix} 5x \\ 5y \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 2x \\ 3y \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 2x+3y \\ 4x-5y \end{pmatrix}$?

150. Kolmion kärkipisteet ovat $(2, -1)$, $(3, 2)$ ja $(1, 3)$ ja niiden paikkavektorit vastaavasti X_1 , X_2 ja X_3 . Havainnollista lineaarikuvausta $T(X) = 2X$. Muodosta matriisi A , joka välittää tämän kuvauksen.

151. Muodosta edellisessä tehtävässä saadun matriisin A käänteismatriisi A^{-1} . Mikä geometrinen merkitys matriisin A^{-1} välittämällä lineaarikuvauksella on?

152. Kooltaan $10 \text{ cm} \times 15 \text{ cm}$ olevassa valokuvassa kolmen henkilön nenänpäät sijaitsevat kohdissa $(4,6; 3,2)$, $(9,0; 7,2)$ ja $(11,7; 5,0)$. Kuva suurennetaan niin, että kuva-ala tulee kaksinkertaiseksi kuvan muodon säilyessä. a) Muodosta matriisi, joka välittää suurennuksen. b) Mitkä ovat suurennetun kuvan mitat? c) Missä pisteissä nenänpäät ovat suurennetussa kuvassa?

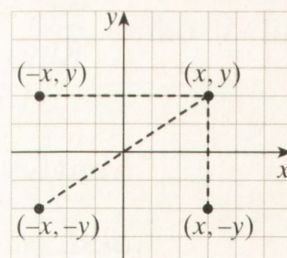
153. Sovella matriisin $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ välittämää kuvausta neliöön, jonka

kärkipisteet ovat $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(4, 4)$ ja $(0, 4)$. Havainnollista kuvausta geometrisesti. Onko kysymyksessä lineaarikuvaus?

3 Peilaus

Pisteen (x, y) peilikuva

- ▶ x -akselin suhteen on $(x, -y)$
- ▶ y -akselin suhteen on $(-x, y)$
- ▶ origon suhteen on $(-x, -y)$.



Kun pisteen (x, y) paikkavektori $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ kerrotaan matriisilla $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

saadaan $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$. Tuloksena on pisteen $(x, -y)$ paikkavektori, mistä voidaan päätellä, että kyseinen kertojamatriisi välit-

tää peilauksen x -akselin suhteen. Vastaavalla tavalla voidaan nähdä oikeiksi kaksi muuta alla olevaa sääntöä.

Peilauksen

- ▶ x -akselin suhteen välittää matriisi $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- ▶ y -akselin suhteen välittää matriisi $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- ▶ origon suhteen välittää matriisi $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

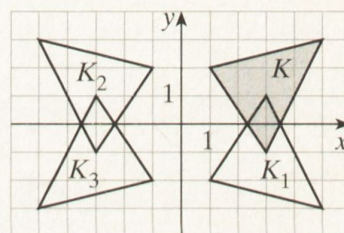
Peilauksen yhtälö on kaikissa esitetyissä tapauksissa muotoa $T(X) = AX$, jossa A on 2×2 -matriisi. Tästä syystä peilaus on lineaarikuvaus (ks. esimerkki 2 s. 72). Peilaus on *yhtenevyyskuvaus*, sillä kaikki etäisyydet peilattavan suoran tai pisteen suhteen säilyvät. Huomaa, että peilaus origon suhteen on erikoistapaus venytyksestä origon suhteen.

ESIMERKKI

Kolmion K kärkipisteet ovat $(3, -1)$, $(5, 3)$ ja $(1, 2)$. Kolmio K peilataan x -akselin, y -akselin ja origon suhteen, jolloin saadaan vastaavasti kolmiot K_1 , K_2 ja K_3 . Piirrä nämä kolmiot. Millä kuvauksilla kolmiot K_2 ja K_3 saadaan kolmiosta K_1 ?

Ratkaisu:

Oheisessa kuvassa ovat kaikki kysytyt kolmiot. Kolmio K_2 saadaan kolmiosta K_1 peilauksella origon suhteen ja kolmio K_3 peilauksella y -akselin suhteen. Tämä tulos nähdään oikeaksi soveltamalla peilaussääntöjä K_1 :n kärkipisteisiin. Kolmio K_1 voidaan ilmaista kärki-



ensä avulla matriisina $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$. Kerrotaan tämä matriisilla $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, joka välittää peilauksen y -akselin suhteen.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Tuloksena on kolmion K_3 kärjet ilmoittava matriisi. Vastaavasti voidaan laskea kolmion K_2 kärkipisteet.

Peilausta origon kautta kulkevan suoran suhteen käsitellään myöhemmin (ks. s. 79).

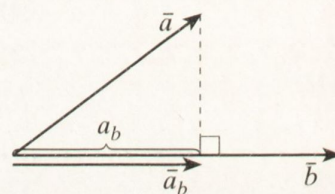
T E H T Ä V I Ä

- 154.** Nelikulmion N kärkipisteet ovat $(3, -1)$, $(5, 2)$, $(4, 3)$ ja $(1, 1)$. Nelikulmio N peilataan y -akselin ja origon suhteen, jolloin saadaan vastaavasti nelikulmiot N_1 ja N_2 . Piirrä nämä nelikulmiot ja laske niiden kärkipisteet peilausmatriiseja käyttäen. Millä kuvauksella N_2 saadaan N_1 :stä?
- 155.** Kolmio K on peilattu ensin x -akselin suhteen ja näin saatu kolmio origon suhteen, jolloin on saatu kolmio K' . Määritä kolmion K kärkipisteet, kun K' :n kärkipisteet ovat $(-4, -1)$, $(-3, 4)$ ja $(-1, 2)$.
- 156.** Matriisi A välittää peilauksen x -akselin suhteen. Muodosta A :n käänteismatriisi. Minkä kuvauksen se välittää?
- 157.** Matriisit A , B ja C välittävät peilauksen vastaavasti x -akselin, y -akselin ja origon suhteen. Minkä kuvauksen välittää tulomatriisi $T = ABC$?

4 Projektio

Vektorin $\vec{a}$ skalaariprojektio vektorilla $\vec{b}$ määräytyy vektorilaskennan mukaan yhtä-

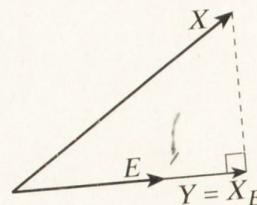
löllä $a_b = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$. Kun luvulla a_b kerrotaan



$\vec{b}$:n suuntainen yksikkövektori $\vec{b}^0$, saadaan vektori $\vec{a}_b = a_b \vec{b}^0$, jota sanotaan $\vec{a}$:n (vektori)projektioksi $\vec{b}$:llä. Jos $\vec{b}$ on yksikkövektori, niin $a_b = \vec{a} \cdot \vec{b}$ ja $\vec{a}_b = a_b \vec{b} = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{b}$.

Selvitetään nyt, mikä matriisi välittää tasossa projektiokuvauksen eli projisioi annetun vektorin halutulle suoralle. Olkoon X jokin avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektori ja E jokin saman avaruuden yksikkövektori. Silloin vektorin X projektio vektorilla E (eli vektorin E määräämällä suoralla) on $Y = X_E = (X \cdot E)E$. Skalaaritulon laskusääntöjen nojalla

$$Y = (X \cdot E)E = E(X \cdot E) = E(E \cdot X).$$



Toisaalta $E \cdot X$ tarkoittaa samaa kuin tulo $E^T X$ (ks. tehtävä 158), joten

$$Y = E(E \cdot X) = E(E^T X) = (EE^T)X.$$

Tästä nähdään, että projektiokuvaus on lineaarikuvauks, jonka välittää matriisi

$$A = EE^T.$$

ESIMERKKI 1

Vektori $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ projisoidaan **a)** x -akselille,

b) suoralle $4x - 3y = 0$. Muodosta kuvauksen matriisi ja määritä X :n vektoriprojektio.

Ratkaisu:

a) x -akselin suuntainen yksikkövektori on $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, joten projektiokuvauksen x -akselille välittää matriisi

$$E_1 E_1^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Vektorin } X \text{ projektio on vektori}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

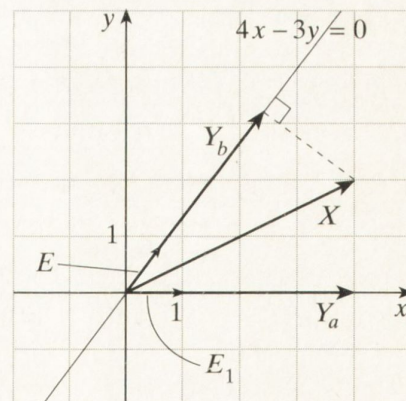
b) Suoran $4x - 3y = 0$ kulmakerroin on $\frac{4}{3}$, joten suoran suuntaiseksi yksikkövektoriksi sopii $E = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Projektiokuvauksen välittää matriisi

$$EE^T = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}.$$

Vektorin X projektio on vektori

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 60 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{2}{5} \\ 3\frac{1}{5} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Oheinen kuva havainnollistaa projektiokuvauksia kohdissa a ja b.

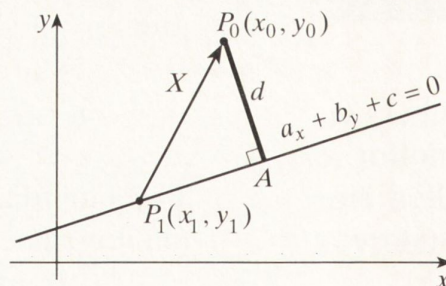


ESIMERKKI 2

Määritetään annetun pisteen $P_0(x_0, y_0)$ etäisyys d tunnetusta suorasta $ax + by + c = 0$. Suoran

kulmakerroin on $-\frac{a}{b}$, joten

suuntavektoriksi sopii $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$, ja



normaalivektoriksi voidaan valita $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Olkoon $P_1(x_1, y_1)$ suoran mielivaltainen piste. Etäisyys d saadaan projisioimalla vektori $X = \overrightarrow{P_1P_0} = \begin{pmatrix} x_0 - x_1 \\ y_0 - y_1 \end{pmatrix}$ suoran normaalivektorille $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ja laskeamalla tämän projektion pituus. Normaalivektorin suuntainen yksikkövektori on $E = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, joten projektiokuvauksen välittää matriisi

$$EE^T = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (a \ b) = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}.$$

Projektiovektori on näin ollen

$$\begin{aligned} Y = \overrightarrow{AP_0} &= \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 - x_1 \\ y_0 - y_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a^2x_0 - a^2x_1 + aby_0 - aby_1 \\ abx_0 - abx_1 + b^2y_0 - b^2y_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a(ax_0 + by_0) - a(ax_1 + by_1) \\ b(ax_0 + by_0) - b(ax_1 + by_1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Koska $P_1(x_1, y_1)$ on suoran $ax + by + c = 0$ piste, niin

$$ax_1 + by_1 = -c. \text{ Silloin } Y = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a(ax_0 + by_0 + c) \\ b(ax_0 + by_0 + c) \end{pmatrix},$$

joten sen pituus on

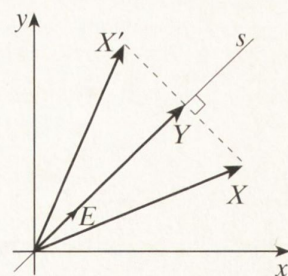
$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{a^2 + b^2} \sqrt{a^2(ax_0 + by_0 + c)^2 + b^2(ax_0 + by_0 + c)^2} \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2} |ax_0 + by_0 + c| \sqrt{a^2 + b^2} \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

Pisteen (x_0, y_0) etäisyys suorasta $ax + by + c = 0$ on siis

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Sovelletaan vektorin projektiota peilaukseen siinä tilanteessa, kun peilaus tapahtuu origon kautta kulkevan suoran suhteen. Olkoon s origon kautta kulkeva suora, E sen suuntainen yksikkövektori ja Y vektorin X projektio suoralla s (kuva). Silloin $Y = EE^T X$. Vektorin X peilikuva suoran s suhteen on näin ollen

$$\begin{aligned} X' &= Y + (Y - X) \\ &= 2Y - X \\ &= 2EE^T X - X \\ &= (2EE^T - I)X. \end{aligned}$$



Peilauksen suoran suhteen välittää siis matriisi $A = 2EE^T - I$. Kuvion muoto ja koko peilauksessa säilyvät, joten peilaus on yhtenevyyskuvaus.

ESIMERKKI 3

Määritä pisteen $(4, 2)$ peilikuva suoran $4x - 3y = 0$ suhteen.

Ratkaisu:

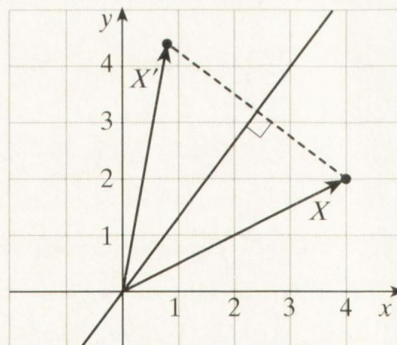
Esimerkin 1 mukaan suoran $4x - 3y = 0$ suuntainen yksikkövektori on $E = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, joten peilauksen välittää matriisi

$$A = 2 \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \frac{1}{5} (3 \ 4) - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{25} \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix}$$

Se kuvaa pisteen $(4, 2)$ paikkavektorin $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ vektoriksi

$$X' = AX = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 20 \\ 110 \end{pmatrix} = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 4,4 \end{pmatrix}.$$

Pisteen $(4, 2)$ peilikuva on siis $(0,8; 4,4)$.



T E H T Ä V I Ä

158. Olkoon **a)** $E = \begin{pmatrix} -0,8 \\ 0,6 \end{pmatrix}$ ja $X = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix}$, **b)** $E = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Osoita, että $E \cdot X = E^T X$.

159. Vektori $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ projisoidaan **a)** y -akselille, **b)** suoralle

$x - y = 0$. Muodosta kuvauksen matriisi ja määritä X :n vektori-projektio.

160. Vektori $X = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ projisoidaan suoralle

a) $y = 2x$, **b)** $y = 2x - 2$. Muodosta kuvauksen matriisi ja määritä X :n vektoriprojektio.

161. Laske pisteen $(-2, 3)$ etäisyys suorasta **a)** $4x - 3y - 8 = 0$,

b) $y = 2x + 2$, **c)** $3x + y + 3 = 0$, **d)** $\frac{x}{5} = \frac{y}{12}$.

162. Määritä suorasta $4x + 3y - 7 = 0$ etäisyydellä 2 olevien suorien yhtälöt.

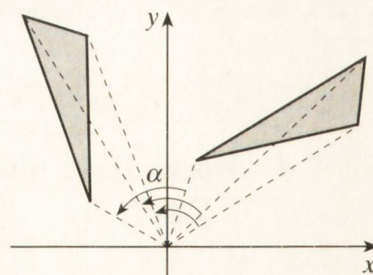
163. Määritä suorien $4x - 2y + 1 = 0$ ja $x - 2y + 3 = 0$ muodostamien kulmien puolittajien yhtälöt.

164. Määritä pisteen (x, y) peilikuva suoran $y = x$ suhteen.

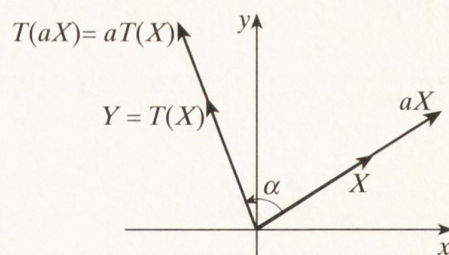
165. Määritä pisteen $(6, -3)$ peilikuva suoran $y = \sqrt{2}x$ suhteen.

5 Kierto

Kierto tasossa tarkoittaa kuvausta, jossa paikkavektori kiertyy alkupisteensä ympäri vastapäivään eli positiiviseen kierto-suuntaan. Tasokuvion kierrossa kaikki kuvion pisteet kiertävät saman kulman verran origon ympäri. Kierrossa kuvion muoto ja koko säilyvät, joten kierro on yhtenevyyskuvaus.



Olkoon T kierto origon ympäri vastapäivään kulman α verran. Sovelletuna vektoriin X se antaa kiertyneen vektorin $Y = T(X)$. Viereisellä kuviolla voidaan geometrisesti perustella, että $T(aX) = aT(X)$, $a \in \mathbb{R}$. Toisaalta voidaan myös osoittaa, että $T(X_1 + X_2) = T(X_1) + T(X_2)$, joten kierto on lineaarikuvauks.

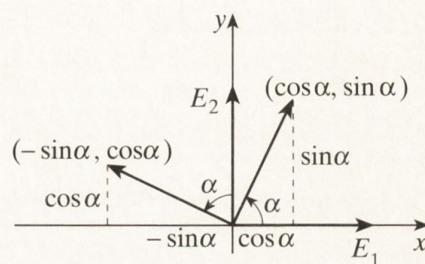


Kun kiertoa T sovelletaan kanta-vektoreihin $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ja $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, saadaan oheisen kuvan mukaisesti

$$T(E_1) = T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \text{ ja}$$

$$T(E_2) = T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}. \text{ Silloin}$$

$$\begin{aligned} T(X) &= T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = xT\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + yT\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= x\begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



Tästä nähdään, että kierron tasossa välittää matriisi

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

ESIMERKKI 1

Kolmion K kärkipisteet ovat $(-2, 3)$, $(5, 1)$ ja $(1, 4)$. Kolmio K' saadaan kolmiosta K 90° :n kierrossa origon ympäri positiiviseen suuntaan. Määritä K' :n kärkipisteet.

Ratkaisu:

$$\text{Kierron välittää matriisi } A = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kolmio K voidaan ilmaista kärkiensä avulla matriisina

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}. \text{ Kerrotaan tämä matriisilla } A.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -4 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Kolmion K' kärkipisteet ovat siis $(-3, -2)$, $(-1, 5)$ ja $(-4, 1)$.

ESIMERKKI 2

Mikä piste saadaan pisteestä $(3, 4)$ 60° :n kierrossa origon ympäri?

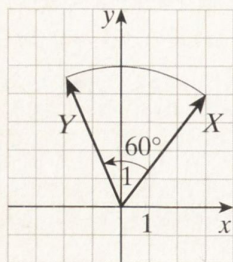
Ratkaisu:

Pisteen $(3, 4)$ paikkavektori on $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ja kierron välittävä

matriisi $A = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Tulokseksi

saadaan vektori $Y = AX = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - 2\sqrt{3} \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \end{pmatrix}$,

joten kysytty piste on $(\frac{3}{2} - 2\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2) \approx (-1,96; 4,60)$.



ESIMERKKI 3

Koulukursseissa käsitellään yleensä vain sellaisia paraabeleja, joiden akseli on jommankumman koordinaattiakselin suuntainen. Johdetaan nyt näistä poiketen sen paraabelin yhtälö, joka saadaan paraabelista $y = x^2$ kiertämällä tätä 45° positiiviseen suuntaan.

Tässä kierrossa paraabelin $y = x^2$ pisteen (x, y) paikkavektorista $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

saadaan vektori $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, joka taas palautuu alkuperäiseksi vektoriksi

45° :n kierrolla negatiiviseen suuntaan eli 315° :n kierrolla positiiviseen suuntaan. Jälkimmäisen

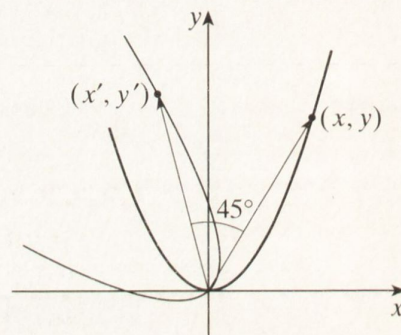
kierron välittää matriisi $\begin{pmatrix} \cos 315^\circ & -\sin 315^\circ \\ \sin 315^\circ & \cos 315^\circ \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, joten

$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x' + y' \\ -x' + y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Näin ollen

$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$ ja $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y')$. Koska nämä koordinaat-

tiarvot toteuttavat alkuperäisen paraabelin yhtälön $x^2 - y = 0$, niin $\frac{1}{2}(x' + y')^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y') = 0$ eli

$\frac{1}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 + x'y' + \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' = 0$. Kierretyn paraabelin



pisteet toteuttavat siis yhtälön

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + xy + \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y = 0, \text{ joka 2:lla kerrottuna saa}$$

hieman sievemmän muodon $x^2 + y^2 + 2xy + \sqrt{2}x - \sqrt{2}y = 0$.

TEHTÄVIÄ

- 166.** Mikä matriisi välittää kierron origon ympäri positiiviseen suuntaan, kun kiertokulma on **a)** 90° , **b)** 180° , **c)** 270° , **d)** 360° ?
- 167.** Muodosta kiertomatriisi 30° :n kierrolle origon ympäri positiiviseen suuntaan.
- 168.** Mikä piste saadaan pisteestä $(4, 4)$ 45° :n kierrossa origon ympäri positiiviseen suuntaan?
- 169.** Mikä piste saadaan pisteestä $(0, \sqrt{3})$ 60° :n kierrossa origon ympäri positiiviseen suuntaan?
- 170.** Mikä piste saadaan pisteestä $(4, 4)$ 150° :n kierrossa origon ympäri *negatiiviseen* suuntaan?
- 171.** Olkoon $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.
Osoita, että $A^2 = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}$.
- *172.** Kolmio $A(3, 2)B(1, 5)C(-1, 1)$ kiertyy origon ympäri positiiviseen suuntaan tylpän kulman verran, jolloin tuloksena on kolmio $A'(-3, 08; 1, 87)B'(-4, 95; -1, 21)C'(-0, 48; -1, 33)$. Määritä kiertymiskulman suuruus asteen tarkkuudella.
- *173.** Kolmion K kärkipisteet ovat $(2, 1)$, $(5, 2)$ ja $(4, 4)$. Kolmio K' saadaan kolmiosta K kiertämällä tätä 90° origon ympäri positiiviseen suuntaan, peilaamalla sitten syntynyt kolmio origon suhteen ja soveltamalla näin saatuun kolmioon matriisin $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ välittämä kuvaus. Määritä K' :n kärkipisteet.
- *174.** Johda yhtälö sille paraabelille, joka saadaan paraabelista $y = x^2$ kiertämällä tätä 45° negatiiviseen suuntaan.
- *175.** Johda yhtälö sille hyperbelille, joka saadaan hyperbelistä $xy = 1$ kiertämällä tätä 135° positiiviseen suuntaan.

Kertauskoe 1

1. Olkoon $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ja $f(x) = x^2 - 2x$. Määritä $f(A)$.
2. Olkoon $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Laske A^2 ja A^3 . Mikä matriisi on A^{11} ?
3. On annettu avaruuden $\mathbb{R}^4$ vektorit $X = (1 \ 1 \ 1 \ 1)^T$ ja $Y = (1 \ 2 \ 0 \ -3)^T$. Laske $\|X\|$ ja $\|Y\|$ ja osoita, että vektorit X ja Y ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.
4. Yritys valmistaa komponenteista a, b ja c tuotteita A, B ja C . Komponentteihin tarvitaan raaka-aineita I, II, III ja IV . Seuraavista taulukoista ilmenevät tarvittavien komponenttien lukumäärät ja raaka-ainemäärät kilogrammoina.

	a	b	c
A	4	2	3
B	5	2	1
C	4	7	3

	I	II	III	IV
a	2	1	0	3
b	1	5	2	2
c	3	3	0	1

I	85
II	68
III	24
IV	93

Oikealla oleva taulukko ilmoittaa raaka-aineiden yksikköhinnat (mk/kg). Olkoot taulukoita vastaavat matriisit vasemmalta oikealle K, R ja H . Muodosta matriisitulo **a)** KR , **b)** KRH ja ilmoita, mikä on tulon alkioiden merkitys.

5. Ratkaise Gaussin-Jordanin eliminointimenetelmällä yhtälö-

ryhmä, jonka laajennettu kerroinmatriisi on $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{array} \right)$.

6. Tutki, muodostavatko vektorit $\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ kannan.

7. Määritä pisteen $(1, 4)$ peilikuva suoran $3x - 4y = 0$ suhteen.

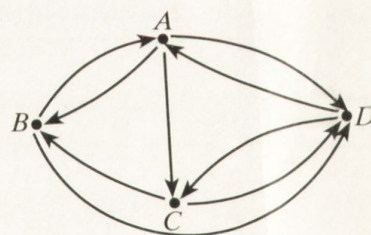
8. Olkoot X ja Y avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektoreita. Osoita, että yhtälö $(X|Y) = x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 3x_2y_2$ määrittelee erään sisätulon $\mathbb{R}^2$:ssa. (Huomaa, että $(X|X) = x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_2 + 3x_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + 2x_2^2$.)

9. Määritellään kuvaus $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ yhtälöllä $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$.

Tutki lineaarikuvauksen määritelmää käyttäen, onko T lineaarikuvaus.

Kertauskoe 2

- Laske $A^T - 2A$, kun $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$.
- Millä k :n arvoilla matriisi $\begin{pmatrix} k & 3 \\ 3-k & 2k \end{pmatrix}$ ei ole säännöllinen?
- Minkä lineaarikuvauksen $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ välittää matriisitulo
a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, **b)** $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$?
- Määritä Gaussin-Jordanin menetelmällä käänteismatriisi matriisille $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
- Olkoon $X_1 = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5 \\ 0 \end{pmatrix}$ ja $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Osoita, että $\{X_1, X_2, X_3\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^3$ ortonormaali kanta.
- Oheinen digraafi kuvaa sitä, miten henkilöt A, B, C ja D saavat suoraan yhteyden toiseen saman ryhmän henkilöön. Muodosta digraafia vastaava matriisi M ja laske matriisi M^2 . Kuinka monella eri tavalla yhden välittäjähenkilön kautta **a)** B saa yhteyden C :hen, **b)** C saa yhteyden B :hen? Miten vastaus ilmenee muodostamistasi matriiseista?
- Olkoon $A_{2 \times 2}$ mielivaltainen todennäköisyysmatriisi eli matriisi, jonka jokainen alkio on ei-negatiivinen ja kummankin rivin alkioiden summa on yksi. Osoita, että A^2 on todennäköisyysmatriisi.



8. Olkoon $V = \mathbb{R}^{2 \times 2} = \left\{ 2 \times 2 - \text{matriisit } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\}$.

Tutki, onko joukko U avaruuden V aliavaruus, kun

$$U = \{A \in V \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}\}.$$

9. Kolmio $A(2, 1)B(6, 1)C(6, 3)$ kiertyy origon ympäri positiiviseen suuntaan 45° , jolloin tuloksena on kolmio $A'B'C'$. Määritä tämän kolmion kärkipisteiden koordinaatit.

Kertauskoe 3

1. Ratkaise yhtälöstä $2 \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ matriisi X ja muodosta X^T .

2. Olkoon $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & r & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ja $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Millä r :n arvoilla $AB = BA$?

3. Kirjaimet A , B ja C voidaan asettaa kuuteen eri järjestykseen. Mitkä näistä esittävät määriteltyä matriisituloa, kun A on 2×2 -matriisi, B on 2×3 -matriisi ja C on 3×2 -matriisi?

4. Ratkaise Gaussin eliminointimenetelmällä yhtälöryhmä

$$\begin{cases} y + 2z = 6 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x - 3y + 2z = 2. \end{cases}$$

5. Esitä vektori $(-5 \ 7 \ 0)^T$ vektoreiden $(-1 \ 3 \ 1)^T$ ja $(6 \ -2 \ 4)^T$ lineaarikombinaationa.

6. Matriisin $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ esittämään kolmioon K sovelletaan matriisin

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$
 välittämä kuvaus, jolloin saadaan kolmio K_1 . Kuinka

suuren pinta-alan muutoksen kuvaus saa aikaan?

7. Olkoon $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$. Määritellään joukossa V yhteenlasku ja skalaarilla kertominen yhtälöillä $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 1 \end{pmatrix}$ ja $a \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ 1 \end{pmatrix}$. Osoita, että V on vektoriavaruus.
(Vihje: $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ja $-\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 1 \end{pmatrix}$)
8. Määritellään kuvaus $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ yhtälöllä $F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^2$.
Selvitä, onko F lineaarikuvaus.
9. Vektori $X = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ projisoidaan suoralle $3x - y = 0$. Muodosta kuvauksen matriisi ja määritä X :n vektoriprojektio.

Kertauskoe 4

1. Määritä matriisin A^2 päälävistäjäalkioiden summa, kun $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.
2. Osoita valitsemallasi esimerkillä, että kahden matriisin tulo voi olla nollamatriisi, vaikkei kumpikaan tekijöistä ole nollamatriisi.
3. Millä a :n arvoilla matriisilla $\begin{pmatrix} 2 & a & -1 \\ 1 & 1 & a \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ on käänteismatriisi?
4. Millä a :n arvoilla yhtälöparilla $\begin{cases} 4x + ay = 2 \\ ax + y = 1 \end{cases}$ on ratkaisuja
a) tarkalleen yksi, **b)** ei yhtään, **c)** äärettömän monta?
5. Ratkaise Gaussin eliminointimenetelmällä yhtälöryhmä
$$\begin{cases} -2x + y & = -1 \\ x - 2y + z & = 0 \\ y - 2z + u & = 0 \\ z - 2u & = 0. \end{cases}$$

6. Osoita, että joukko $\{A, B\}$ on ortonormaali, kun

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ ja } B = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

7. Määritä pisteen $(-3, 4)$ kuva matriisin $A = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix}$ välittämässä kuvauksessa. Minkä kuvauksen matriisi A välittää?

8. Olkoot $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ja $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektoreita. Osoita, että yhtälö $(X|Y) = 3x_1y_1 + x_2y_2$ määrittelee erään sisätulon $\mathbb{R}^2$:ssa

9. Kuinka monta lukujen yhteenlaskua ja kertolaskua tarvitaan kahden **a)** 3×3 -matriisin, **b)** $n \times n$ -matriisin kertomisessa?

Vastauksia

LINEAARIALGEBRA

Matriisit

1. a)

	leipä (mk/kg)	peruna (mk/kg)	sokeri (mk/kg)
Suomi	11,60	2,90	7,50
Ruotsi	12,20	2,00	4,50

Vastaava matriisi on $\begin{pmatrix} 11,60 & 2,90 & 7,50 \\ 12,20 & 2,00 & 4,50 \end{pmatrix}$.

b)

	Suomi	Ruotsi
leipä (mk/kg)	11,60	12,60
peruna (mk/kg)	2,90	2,00
sokeri (mk/kg)	7,50	4,50

Vastaava matriisi on $\begin{pmatrix} 11,60 & 12,60 \\ 2,90 & 2,00 \\ 7,50 & 4,50 \end{pmatrix}$.

2. a) 3×4

b) $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & 4 \\ -4 & 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) $a_{21} = 1$ e) $a_{12} = -5$ f) $a_{22} = -2$

3. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -5 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 7 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

4. a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 \\ -2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

5. a) n b) n

6. a) $\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 10 & -8 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 12 & -8 \\ -20 & 16 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$

7. a) $\begin{pmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 12 & -13 & -8 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

8. a) $x = 3$ ja $y = -4$ b) $x = 8$ ja $y = -6$
c) $x = -2$ ja $y = 7$ d) $x = -12$ ja $y = 10$

9. a) $X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

c) $X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ d) $X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

10. a) $A^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ ja $B^T = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & -8 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$

$$\text{b) } A^T + B^T = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ -3 & -13 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } (A + B)^T = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ -3 & -13 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$$

Yleisesti pätee, että $(A + B)^T = A^T + B^T$.

$$11. \text{ a) } \begin{pmatrix} 6 & 14 \\ -10 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 6 & -6 & 4 \\ 9 & -9 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} -9 & 0 & 10 \\ -3 & 14 & 15 \\ -9 & -6 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 14 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } \begin{pmatrix} 3 & 21 \end{pmatrix} \quad \text{f) } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$12. \text{ a) } 2 \times 2 \quad \text{b) } 4 \times 6 \\ \text{c) ei määritelty} \quad \text{d) } 1 \times 3 \\ \text{e) ei määritelty} \quad \text{f) } m \times n$$

$$13. AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O, BA = \begin{pmatrix} 30 & 45 \\ -20 & -30 \end{pmatrix}$$

$$14. \text{ a) } x = 2 \text{ ja } y = 1 \quad \text{b) } x = 5 \text{ ja } y = -1$$

$$15. ABC = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$16. K = \begin{pmatrix} 250 & 120 & 80 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 4 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix},$$

$$KM = \begin{pmatrix} 1760 & 1790 & 1730 \end{pmatrix}$$

a) Tulon alkiot ilmaisevat markkoina kunkin matkavaihtoehdon kokonaiskustannuksen.

b) Edullisin vaihtoehto on C.

17. Tulo on (9 839).

Mikäli kaikki tuotteet myydään, matkaa varten saadaan 9 839 mk.

$$18. \text{ a) } AA^T = (39)$$

$$22. \text{ a) } 12 \quad \text{b) } mnp$$

$$23. \text{ a) } A^2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{b) } A^4 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$24. \text{ a) } \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 & 6 \\ -4 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$25. A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2A, A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = 4A$$

$$26. \text{ Esim. } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ tai } \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$27. \text{ a) } (A + B)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } (A + B)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Matriisiyhtälö $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ei ole yleisesti voimassa.

28. Matriisiyhtälö $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ ei ole yleisesti voimassa.

$$30. M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) ei yhdelläkään tavalla

b) kahdella eri tavalla

$$31. M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) yksi yhden välilaskun yhteys

b) kaksi yhden välilaskun yhteyttä

c) ei yhtään yhden välilaskun yhteyttä

$$32. M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) yksi b) kaksi c) ei yhtään d) neljä
Kaupunkiin B mentäessä on yksi välilasku tässä kaupungissa.

33. a) Kukin alkio ilmoittaa, kuinka monella tavalla henkilö saa yhteyden toiseen henkilöön suoraan tai yhden välittäjähenkilön kautta.

b) Kukin alkio ilmoittaa, kuinka monella tavalla henkilö saa yhteyden toiseen henkilöön suoraan tai yhden tai kahden välittäjähenkilön kautta.

34. a) $A'(-2,1)B'(-1,4)C'(-4,2)$

b) $A''(-1,-2)B''(-4,-1)C''(-2,-4)$

c) $A'''(2,-1)B'''(1,-4)C'''(4,-2)$

*35. $A' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right) \approx (0,71; 2,12),$

$$B' = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{7}{\sqrt{2}}\right) \approx (3,54; 4,95),$$

$$C' = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{9}{\sqrt{2}}\right) \approx (2,12; 6,36).$$

36. c-kohdan matriisi $\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

39. a) Matriisi on säännöllinen. Käänteismatriisi on $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$

b) Matriisi ei ole säännöllinen.

c) Matriisi ei ole säännöllinen.

d) Matriisi on säännöllinen. Käänteismatriisi on $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$

40. Käänteismatriisi on $\begin{pmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{pmatrix}.$

41. $x \neq 3$ tai $x \neq -2$

42. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

43. a) $\begin{pmatrix} 1 & -1,5 & 0,5 \\ -2 & 3,5 & -0,5 \\ -1 & 2,5 & -0,5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0,25 & -0,35 & -0,1 & 0,275 \\ 0,25 & -0,15 & 0,1 & -0,025 \\ 0,125 & -0,375 & 0,25 & 0,1875 \\ 0 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}$

44. a) on b) on c) ei

46. $(AB)^T = \begin{pmatrix} 3 & -13 & 0 \\ -9 & 5 & 5 \\ 4 & -6 & 3 \end{pmatrix},$

$$B^T A^T = \begin{pmatrix} 3 & -13 & 0 \\ -9 & 5 & 5 \\ 4 & -6 & 3 \end{pmatrix}. \text{ Voidaan osoittaa,}$$

että sääntö $(AB)^T = B^T A^T$ on yleisesti voimassa.

47. $(A^T)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix},$

$$(A^{-1})^T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Voidaan osoittaa, että sääntö

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \text{ on yleisesti voimassa.}$$

48. a) 0 b) 13 c) -8

49. a) 1 b) 1 c) -1

50. a) 81 b) 24 c) 0

51. Käänteismatriisia ei ole.

52. $a \neq 0$ tai $a \neq -3$

53. Determinantin arvo on -1.

54. $7\bar{i} - 15\bar{j} - \bar{k}$

*57. Determinantti ilmoittaa vektoreiden $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ määräämän suuntaissärmiön tilavuuden tai tilavuuden vastaluvun.

Lineaariset yhtälöryhmät

58. a) $x = 5, y = -2$ b) $x = -5, y = -5$

c) $y = 10 - x, x \in \mathbb{R}$ d) ei ratkaisua

59. a) $x = 0, y = 0$ b) $y = 3x, x \in \mathbb{R}$

c) ei ratkaisua d) $x = \frac{1}{5}, y = -\frac{1}{10}$

60. a) ei ratkaisua b) $x = 7, y = 0$

c) $x = 3, y = 1$ d) ei ratkaisua

61. a) $x = 1\frac{1}{3}, y = \frac{1}{3}, z = \frac{2}{3}$

b) $x \in \mathbb{R}, y = 4 - x, z = 2$

c) $x = 4, y = 0, z = -2$

d) ei ratkaisua

62. a) $x = 1\frac{1}{2} - \frac{3}{4}z, y = 3\frac{1}{2} - \frac{1}{4}z, z \in \mathbb{R}$

b) $x = 5 - 2z, y = 0, z \in \mathbb{R}$

c) ei ratkaisuja d) $x = 0, y = z, z \in \mathbb{R}$

63. a) $a \neq -2\frac{1}{2}$ b) $a = -3$

64. a) $a \neq \pm 2$ b) $a = -2$ c) $a = 2$

65. kolmion muotoisia 40, neliön muotoisia 30 ja viisikulmion muotoisia 10 kpl

66. pituus 20 cm, leveys 10 cm ja korkeus 5 cm

67. a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

68. Käänteismatriisi on $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

a) $x = 13, y = 10$ b) $x = 3, y = 2$

c) $x = 70, y = 50$

69. a) $x = 1, y = -2, z = 2$

b) $x = 5, y = 10, z = -15$

c) $x = 0, y = 2, z = -3$

70. a) ei b) on c) on

71. a) $x = 4, y = -10, z = -17$

b) $x = 3,5; y = 2,5; z = 2,5$

c) $x = 10, y = 1, z = 3, u = -6$

d) $x = -1, y = 7 + z, z \in \mathbb{R}, u = -5$

72. a) $x = -1, y = -1, z = -1$

b) $x = 0, y = \frac{3}{4}, z = -\frac{1}{4}$

73. a) $x = 5, y = 4, z = 3, u = 2$

b) $x = 2, y = 0, z = -2, u = 3$

74. a) $x = -2, y = -3, z = -4$

b) $x = 1, y = -2, z = 3, u = 1$

76. a) ei ratkaisua

b) $x = -z + 6, y = z + 2, z \in \mathbb{R}$

77. $x = 7,5; y = -1,5; z = 1,5$

78. a) $y = -5x^2 + 15x - 1$ tai

$$x = -\frac{1}{75}y^2 - \frac{7}{75}y + 2\frac{23}{25}$$

b) $x^2 + y^2 + 72x + 7\frac{1}{5}y - 218\frac{4}{5} = 0$

79. a) $x = \frac{1}{3}, y = 2\frac{1}{3}$

b) $x = 2, y = -4, z = 2$

c) $x = 3, y = 0, z = -7$

80. a) $x = 3, y = -1$

b) $x = 1\frac{1}{3}, y = -\frac{2}{3}, z = -\frac{1}{3}$

c) $x = -z + 1, y = z - 1, z \in \mathbb{R}$

81. a) $x = 2, y = 4, z = -1$

b) $x = 2, y = 1, z = -1, u = -2$

82. a) $x = -9, y = 7$ b) $x = -6, y = 7$

c) $x = -2, y = 3$

83. a) $x = 4, y = -2, z = 3$

b) $x = 5, y = 3, z = -1$

c) $x = 4 - z, y = -2, z \in \mathbb{R}$

84. a) $x = 4, y = -2, z = 3$

b) $x = 1 + 2z, y = 2 + 3z, z \in \mathbb{R}$

c) ei ratkaisua

85. a) $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & 2,5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 20 & 5 & -2 \\ 11 & 3 & -1 \\ -8 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 0,5 & -1,5 & 0 \\ -0,5 & 1,5 & 0,5 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

86. a) Käänteismatriisi on $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Käänteismatriisia ei ole.

c) Käänteismatriisia ei ole.

87. a) $x = 0, y = 0$

b) $x \in \mathbb{R}, y = 2x$

c) $x = 0, y = 0$

88. a) $x = 0, y = 0, z = 0$

b) $x = -\frac{1}{5}z, y = -\frac{3}{5}z, z \in \mathbb{R}$

c) $x = -\frac{1}{5}z + \frac{1}{5}u, y = -\frac{3}{5}z - \frac{2}{5}u,$
 $z \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}$

d) $x = 0, y = 0, z = 0, u = 0$

*89. a) $a = 5$ ja $b \neq 4$

b) $a = 5$ ja $b = 4$ c) $a \neq 5$

*90. $x_1 = 500 - x_3 - x_5, x_2 = x_3 + x_5 - 200,$
 $x_3 \in \mathbb{R}, x_4 = 350 - x_5, x_5 \in \mathbb{R}$

Lineaariavaruus

91. $V = \{0, 1, 2\}$ ei ole vektoriavaruus.

94. Esimerkiksi määritelmän viimeinen ehto ei toteudu.

98. a) $X = 2Y + 3Z$ b) $X = Y + 2Z$

104. $X = \frac{3}{2}Z - Y$

105. a) U on avaruuden V aliavaruus.

b) U ei ole avaruuden V aliavaruus.

106. U ei ole avaruuden V aliavaruus.

U esittää xyz -koordinaatistossa z -akselin suuntaista tasoa, joka leikkaa xy -tason pitkin suoraa $5x + y - 1 = 0$.

107. U on avaruuden V aliavaruus.

108. a) U ei ole avaruuden V aliavaruus.

b) U on avaruuden V aliavaruus.

112. a) ovat lineaarisesti riippumattomia

b) eivät ole lineaarisesti riippumattomia

113. a) eivät ole lineaarisesti riippumattomia

b) ovat lineaarisesti riippumattomia

114. a) eivät ole lineaarisesti riippumattomia

b) ovat lineaarisesti riippumattomia

115. a) eivät ole lineaarisesti riippumattomia

b) ovat lineaarisesti riippumattomia

c) eivät ole lineaarisesti riippumattomia

d) ovat lineaarisesti riippumattomia

116. a) ovat lineaarisesti riippumattomia

b) eivät ole lineaarisesti riippumattomia

c) ovat lineaarisesti riippumattomia

120. a) on

b) ei ole

121. a) muodostavat

b) eivät muodosta

c) eivät muodosta

d) eivät muodosta

122. $t \neq 4$

Sisätuloavaruus

125. a) 6

b) 0

126. a) -6

b) 9

127. a) $(X, Y) \approx 94,4^\circ$

b) $(X, Y) = 120^\circ$

*131. a) $(O|X) = (O + O|X) = (O|X) + (O|X)$, joten tulee olla $(O|X) = 0$.

b) $(X|Y + Z) = (Y + Z|X) = (Y|X) + (Z|X) = (X|Y) + (X|Z)$

c) $(X|aY) = (aY|X) = a(Y|X) = a(X|Y)$

132. a) 10 b) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt{99} = 3\sqrt{11}$

133. a) $\sqrt{10}$ b) $\sqrt{14}$ c) 3

134. $a = \pm\sqrt{2}$

135. $\sqrt{35}$

136. 45°

137. a) $109,5^\circ$ b) 180°

138. $(X, Y) \approx 31,9^\circ$

139. $a = 1$

144. a) $Y = -X_1 - \sqrt{2}X_2 + \sqrt{2}X_3$

b) $Y = E_1 + \sqrt{3}E_2 - E_3$

Tason lineaarikuvaukset

145. T on lineaarikuvaus.

146. T ei ole lineaarikuvaus.

148. F ei ole lineaarikuvaus.

149. a) $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$

150. Kuvauksen matriisi on $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

151. $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Matriisi A^{-1} välittää

yhdenmuotoisuuskuvauksen mittakaavassa 0,5 eli kutistaa kuvion puoleen alkuperäisestä koostaan.

152. a) $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

b) $14,1 \text{ cm} \times 21,2 \text{ cm}$

c) $(6,5; 4,5)$, $(12,7; 10,2)$ ja $(16,5; 7,1)$

153. Kysymyksessä on lineaarikuvaus. Se antaa kärkipisteiksi $(0, 0)$, $(4, 2)$, $(6, 6)$ ja $(2, 4)$.

154. N_1 : $(-3, -1)$, $(-5, 2)$, $(-4, 3)$ ja $(-1, 1)$

N_2 : $(-3, 1)$, $(-5, -2)$, $(-4, -3)$ ja $(-1, -1)$

Nelikulmio N_2 saadaan N_1 :stä peilauksella x -akselin suhteen.

155. $(4, -1)$, $(3, 4)$ ja $(1, 2)$

156. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ välittää peilauksen x -akselin suhteen.

157. $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, eli kysymyksessä on identtinen kuvaus.

159. a) $EE^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $EE^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

160. a) $EE^T = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1,6 \\ 3,2 \end{pmatrix}$

b) kuten a-kohta

161. a) 5 b) $\sqrt{5}$
c) 0 d) 3

162. $4x + 3y - 17 = 0$ ja $4x + 3y + 3 = 0$

163. $2x + 2y - 5 = 0$ ja $6x - 6y + 7 = 0$

164. (y, x)

165. $(-2\sqrt{2} - 2, 4\sqrt{2} - 1) \approx (-4,83; 4,66)$

$$166. \text{ a) } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$167. \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$168. (0, 4\sqrt{2}).$$

$$169. (-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$170. (2 - 2\sqrt{3}, -2 - 2\sqrt{3}) \approx (-1, 46; -5, 46)$$

$$*172. 115^\circ$$

$$*173. (3, -6), (6, -15) \text{ ja } (12, -12)$$

$$*174. x^2 + y^2 - 2xy - \sqrt{2}x - \sqrt{2}y = 0$$

$$*175. \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$$

Kertauskoe 1

$$1. \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2. A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I, A^3 = A^2 A = IA = A,$$

$$A^{11} = A$$

$$3. \|X\| = 2, \|Y\| = \sqrt{14}, (X|Y) = 0$$

$$4. \text{ a) } KR = \begin{pmatrix} 19 & 23 & 4 & 19 \\ 15 & 18 & 4 & 20 \\ 24 & 48 & 14 & 29 \end{pmatrix}. \text{ Matriisitulo}$$

KR ilmoittaa, kuinka paljon mitäkin raaka-ainetta tarvitaan tuotteisiin A , B ja C . Esimerkiksi tuotteeseen A tarvitaan raaka-ainetta II yhteensä 23 kg.

$$\text{b) } KRH = \begin{pmatrix} 5 & 042 \\ 4 & 455 \\ 8 & 337 \end{pmatrix}. \text{ Matriisitulo } KRH$$

ilmoittaa, kuinka paljon kuhunkin tuotteeseen tarvittavat raaka-aineet maksavat. Esimerkiksi raaka-aineet tuotteeseen A maksavat 5 042 mk.

$$5. x = 2, y = -2, z = -1$$

6. Vektorit muodostavat kannan.

$$7. (4, 12; -0, 16)$$

9. T on lineaarikuvaus.

Kertauskoe 2

$$1. \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$2. k = -3 \text{ tai } k = 1\frac{1}{2}$$

3. a) 90° kierto origon ympäri positiiviseen suuntaan
b) venytys mittakaavassa 6

$$4. \text{ Käänteismatriisi on } \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -5 & -4 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$6. M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) B saa yhteyden C :hen kahdella eri tavalla yhden välittäjähenkilön kautta. (Matriisin vastaava alkio on 2.)

b) C ei saa yhteyttä B :hen yhden välittäjähenkilön kautta. (Matriisin vastaava alkio on 0.)

8. Joukko U ei ole avaruuden V aliavaruus.

9. Kolmion $A'B'C'$ kärjet ovat

$$A' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right) \approx (0,71; 2,12),$$

$$B' = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{7}{\sqrt{2}}\right) \approx (3,54; 4,95) \text{ ja}$$

$$C' = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{9}{\sqrt{2}}\right) \approx (2,12; 6,36).$$

Kertauskoe 3

1. $X = \begin{pmatrix} 11 & -10 \\ -1 & -14 \end{pmatrix}, X^T = \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ -10 & -14 \end{pmatrix}$

2. $r = 1$

3. ABC, BCA ja CAB

4. $x = -2, y = 0$ ja $z = 3$

5. $\begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

6. 108 pay

8. Kuvaus F ei ole lineaarikuvaus.

9. kuvausmatriisi $\begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 \\ 0,3 & 0,9 \end{pmatrix},$

vektoriprojektio $\begin{pmatrix} 0,8 \\ 2,4 \end{pmatrix}$

Kertauskoe 4

1. 7

2. Esimerkki: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. Matriisilla on käänteismatriisi, kun $a \neq 0$ ja $a \neq -3$.

4. a) $a \neq \pm 2$, b) $a = -2$, c) $ai = 2$

5. $x = \frac{4}{5}, y = \frac{3}{5}, z = \frac{2}{5}, u = \frac{11}{55}$

7. $(-5, 0)$. Kuvaus on kierto origon ympäri noin $53,1^\circ$ vastapäivään.

9. a) 18 yhteenlaskua ja 27 kertolaskua

b) $n^2(n-1)$ yhteenlaskua ja n^3 kertolaskua



CALCULUS 11

sisältää yhden lukiokurssin
mittaisen oppiaineksen
Lineaarialgebran
perusteista ja sovelluksista.

SUOMALAINEN KIRJAKAUPPA OY
Calculus 11 : lineaarialgebra
9511159305 K51 90928



9 789511 159308
005 08 75.00 MK



9 789511 159308

ISBN 951-1-15930-5

Otava K51 Tno 130C

Kannen kuva: Suomen kuvapalvelu oy

Kannen suunnittelu: Silja Peltonen